INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXIV. BAND ZWEITES HEFT 1956

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DM 9,60

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber
Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101
oder an die Herren
Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12
Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Neureut über Karlsruhe, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **F. Schleicher**, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN
einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Inhalt:

Seite

Becker, E., Die pulsierende Quelle unter der freien Oberfläche eines Stromes endlicher Tiefe. Mit 7 Textabbildungen 69

Kneschke, A., Über gesteuerte Abkühl- und Anwärmvorgänge bei festen Körpern 77

Heinrich, G., und *K. Desoyer*, Hydromechanische Grundlagen für die Behandlung von stationären und instationären Grundwasserströmungen. Mit 1 Textabbildung 81

Falk, S., Die Knickformeln für den Stab mit *n* Teilstücken konstanter Biegesteifigkeit. Mit 7 Textabbildungen 85

Wuest, W., Theorie der Hochdruckröhrenfeder. Mit 19 Textabbildungen 92

Fehrle, L., Kritische Drehzahlen gewisser Rotorformen unter Berücksichtigung der Kreiselwirkung. Mit 2 Textabbildungen 111

Hoeland, G., Stützmomenteneinflußfelder durchlaufender elastischer Platten mit zwei frei drehbar gelagerten Rändern. Mit 6 Textabbildungen 124

Berichtigung
zu „Ingenieur-Archiv“ Band XXIII

In der Seitenzählung zwischen Heft 1 und 2 wurden durch ein Versehen die Seitenzahlen 69—72 übersprungen: Das Heft 1 endet mit der Seitenzahl 68, das Heft 2 beginnt mit der Seitenzahl 73. Inhaltlich sind beide Hefte jedoch vollständig.

INGENIEUR-ARCHIV

XXIV. BAND ZWEITES HEFT 1956

Die pulsierende Quelle unter der freien Oberfläche eines Stromes endlicher Tiefe

Von E. Becker

1. Übersicht. Die folgende Arbeit behandelt das zweidimensionale Problem einer Quelle, die unter der freien Oberfläche eines Stromes endlicher Tiefe pulsiert. Im allgemeinen laufen in einiger Entfernung von der Quelle vier voneinander verschiedene Wellenzüge von dieser weg, davon einer in Gegenstromrichtung, die drei andern in Mitstromrichtung. Für diese Wellen wird die Wellenlänge durch verhältnismäßig einfache, an das Dispersionsgesetz der Wellen anknüpfende Überlegungen bestimmt. Weiterhin werden Formeln für die Wellenamplituden angegeben. Wenn man mit den Werten von Pulsationsfrequenz und Stromgeschwindigkeit gewisse Grenzen überschreitet, dann verschwindet die stromaufwärts wandernde Welle und ebenso eine der stromabwärts wandernden Wellen. Die Formeln für Wellenlänge und Amplitude werden besonders einfach für einen unendlich tiefen Strom.[1] Als Grenzfälle werden hier die in ruhendem Wasser pulsierende Quelle [2] und die zeitlich stationäre Quelle [3] erwähnt.

2. Aufgabenstellung und Grundgleichungen. Im Abstande h unter der Oberfläche einer mit der Geschwindigkeit c über horizontalem Boden gleichförmig strömenden, schweren Flüssigkeit befinde sich eine Quelle, deren Stärke Q sich periodisch mit der Zeit ändert:

$$Q = Q_0 e^{i \omega t} \tag{1}$$

(Abb. 1). Die im ungestörten Zustande ebene Oberfläche des Stromes wird durch die Wirkung der Quelle verformt. Durch die nachfolgenden Rechnungen sollen diese Verformungen bestimmt werden und zwar insbesondere für große Entfernungen von der Quelle, wo sich harmonische, von der Quelle fortlaufende Wellen ergeben.

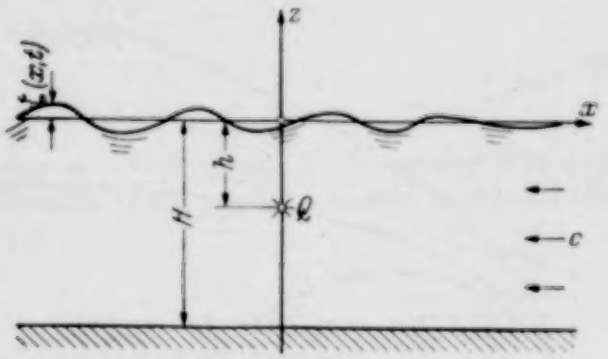


Abb. 1. Bezeichnungen, Koordinatensystem.

Unter der Annahme wirbelfreier Strömung und bei Beschränkung auf kleine Oberflächenverformung muß das Strömungspotential Φ folgenden Bedingungen genügen (zur Koordinatenbezeichnung vgl. Abb. 1):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \,. \tag{2}$$

Für $z = 0$ muß gelten [4]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \Phi + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \,. \tag{3}$$

Für $z = -H$ (Boden) muß gelten

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \,, \tag{4}$$

und in Umgebung der Quelle muß sein

$$\Phi = -\frac{Q}{2\pi} \ln r + \text{reguläre Funktion} \,. \tag{5}$$

---

[1] Zusatz bei der Korrektur: Während der Drucklegung dieser Arbeit wurde dem Verfasser eine russische Veröffentlichung bekannt, in der auf etwas anderem Wege die Lösung für diesen Sonderfall ebenfalls gefunden wird: *M. D. Khaskind*, Über Wellenbewegungen schwerer Flüssigkeiten (in Russisch). Prikl. Math. Mekh. 18 (1954), S. 15.

[2] *H. Holstein*, Z. angew. Math. Mech., 17, (1937), S. 38.

[3] *H. Lamb*, Hydrodynamics, 6th ed., Cambridge, 1953; *Th. Havelock*, Proc. Roy. Soc. A, 115, (1927), S. 274.

[4] Vgl. *Lamb*, a. a. O. S. 364; die dort angegebene Bedingung ist als Grenzfall $c = 0$ in (3) enthalten.

Außerdem müssen gewisse Ausstrahlungsbedingungen im Unendlichen befriedigt sein, die erst später formuliert werden sollen.

Wenn man eine den Bedingungen (1) bis (5) genügende Lösung gefunden hat, erhält man die Oberflächenverformung ζ (Auslenkung aus der horizontalen Ruhelage) als [1]

$$\zeta = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi\Big|_{z=0}. \tag{6}$$

Da die Quelle harmonisch mit der Frequenz ω pulsiert, machen wir den Ansatz

$$\Phi = \varphi(x, z)\, e^{i\omega t} + c\,x\,; \tag{7}$$

hierbei ist $c\,x$ das Potential der ungestörten Parallelströmung. Setzt man den Ansatz (7) in die Randbedingung (3) ein, so wird

$$-\omega^2\varphi - 2\,i\,\omega\,c\,\varphi_x + c^2\varphi_{xx} + g\,\varphi_z = 0 \tag{8}$$

für $z = 0$.

3. Harmonische Wellen als Lösungen der Grundgleichungen. Bevor das durch die Gleichungen (1) bis (8) gegebene Randwertproblem gelöst wird, sollen harmonische Wellen als partikuläre Lösungen der Gleichungen (2), (3), bzw. (8), und (4) betrachtet werden. Hierzu machen wir den Ansatz

$$\varphi_1 = e^{-i\,k\,x}\frac{\mathfrak{Cof}\,k\,(z+H)}{\mathfrak{Cof}\,k\,H}, \qquad (k > 0), \tag{9}$$

$$\varphi_2 = e^{+i\,k\,x}\frac{\mathfrak{Cof}\,k\,(z+H)}{\mathfrak{Cof}\,k\,H}, \qquad (k > 0). \tag{10}$$

Der Ansatz (9) entspricht Wellen in Gegenstromrichtung, (10) in Mitstromrichtung. Beide Ansätze befriedigen die Gleichungen (2) und (4); die Konstante $1/\mathfrak{Cof}\,k\,H$ wurde zur Vereinfachung späterer Rechnungen eingeführt. Die Bedingung (3) bzw. (8) ergibt

für φ_1: $f_1(k) \equiv (\omega + c\,k)^2 - g\,k\,\mathfrak{Tg}\,k\,H = 0$, (11)

für φ_2: $f_2(k) \equiv (\omega - c\,k)^2 - g\,k\,\mathfrak{Tg}\,k\,H = 0$. (12)

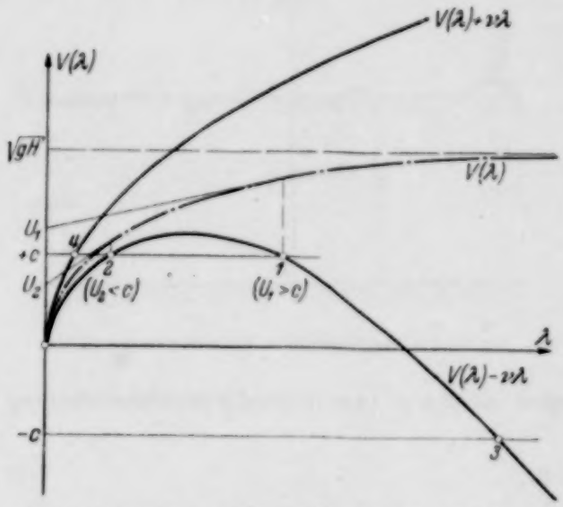


Abb. 2. Dispersionskurve $V(\lambda)$ und Übersicht über die Lösungen der Gleichungen (15), (18), (19).

Wir diskutieren zunächst Gleichung (11). Unter der Voraussetzung $k \neq 0$ erhält man

$$\left(\frac{\omega}{k} + c\right)^2 = \frac{g}{k}\,\mathfrak{Tg}\,k\,H = V^2(k). \tag{13}$$

$V(k)$ ist hierbei bekanntlich die zur Wellenzahl k gehörige Phasengeschwindigkeit bei Ausbreitung der Wellen auf ruhendem Wasser [2]. Wenn wir der Anschaulichkeit halber von der Kreisfrequenz ω und der Wellenzahl k zu der Frequenz $\nu = \omega/2\pi$ und der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ übergehen, erhalten wir aus (13) nach Wurzelziehen und einfacher Umordnung

$$\pm\, V(\lambda) - \nu\lambda = c. \tag{14}$$

Das untere Vorzeichen kann hier zu keiner Lösung führen, da definitionsgemäß alle in (14) vorkommenden Größen positiv sind. Man erhält daher

$$V(\lambda) - \nu\lambda = c. \tag{15}$$

Die Lösungsmöglichkeiten von (15) lassen sich leicht an Abb. 2 übersehen. Außer der „Dispersionskurve" $V(\lambda)$ ist hier $V(\lambda) - \nu\lambda$ und $V(\lambda) + \nu\lambda$ (vgl. weiter unten) aufgetragen. Man erkennt, daß es entweder zwei einfache Lösungen (mit *1* und *2* bezeichnet) gibt, oder eine Doppellösung oder gar keine. Die beiden letzten Fälle sollen zunächst außer Betracht bleiben und der Fall zweier reeller Lösungen soll zuerst betrachtet werden.

Zur Unterstützung der Anschauung schreiben wir (15) in der Form

$$\frac{V(\lambda) - c}{\lambda} = \nu. \tag{16}$$

[1] Vgl. *Lamb*, a. a. O., S. 364.
[2] Vgl. *Lamb*, a. a. O., S. 366.

In dieser Schreibweise erkennt man leicht, daß die Lösungen von (15) Wellen entsprechen, deren Phase relativ zum ruhenden Wasser mit der Geschwindigkeit V stromaufwärts läuft. Da in beiden Fällen $V > c$ ist, laufen die Wellen mit $V - c$ an einem ruhenden Beobachter stromaufwärts vorbei. Gleichung (16) ist dann die Bedingung dafür, daß die vom ruhenden Beobachter festgestellte Frequenz (Zahl der Wellen, die in der Zeiteinheit an ihm vorbeiziehen) den vorgegebenen Wert ν hat.

Man kann weiterhin leicht zeigen, daß die Lösung *1* einer Welle entspricht, deren Gruppengeschwindigkeit $U > c$ ist, während bei Lösung *2* $U < c$ ist (siehe Abb. 2). Nur Lösung *1* entspricht daher Wellen, die imstande sind, Energie stromaufwärts zu transportieren, denn U ist die Geschwindigkeit, mit der Energie relativ zum ruhenden Wasser transportiert wird.

Die Funktion $f_1(k)$ wird im folgenden in der Form

$$\left.\begin{aligned} f_1(k) &= (k - k_1)\,(k - k_2)\,f_{12}(k) \\ f_{12}(k) &\neq 0 \qquad \text{in} \qquad 0 \leq k \leq \infty \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

mit

geschrieben werden.

Gleichung (12) führt in ganz analoger Weise auf folgende beiden Gleichungen:

$$V - \nu\lambda = -c\,, \tag{18}$$

$$V + \nu\lambda = +c\,. \tag{19}$$

Der Anschauung entnimmt man sofort (Abb. 2), daß (18) und (19) für alle Wertepaare c, ν jeweils eine einfache Lösung haben. Die Lösung *3* von (18) gibt Wellen, die sich relativ zum Strom mit der Geschwindigkeit V, absolut also mit $V + c$ stromab bewegen; Gleichung (19) gibt Wellen *4*, deren Phase sich mit $V < c$ relativ stromauf, absolut also mit $c - V$ stromab bewegt. Die Funktion $f_2(k)$ läßt sich immer in folgender Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} f_2(k) &= (k - k_3)\,(k - k_4)\,f_{34}(k) \\ f_{34}(k) &\neq 0 \qquad \text{in} \qquad 0 \leq k \leq \infty \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

mit

4. Bestimmung des Potentials aus den Grundgleichungen. Nach dieser Vorbereitung läßt sich die in Ziff. 2 gestellte Aufgabe folgendermaßen lösen: Das Potential φ wird aus drei Bestandteilen zusammengesetzt:

$$\varphi = \varphi^{(w)} + \varphi^{(q)} + \tilde{\varphi}\,. \tag{21}$$

Das Glied $\varphi^{(w)}$ ist ein geeignet gewähltes Potential freier Wellen der oben besprochenen Art. Das Glied $\varphi^{(q)}$ ist das Potential der in Abb. 3 skizzierten Quell-Senkenanordnung; es genügt den Bedingungen (2), (4) und (5). Für $z = 0$ ist

$$\varphi^{(q)} = \varphi^{(q)}_x = \varphi^{(q)}_{xx} \equiv 0\,. \tag{22}$$

Das Glied $\varphi^{(q)}$ trägt somit nichts zur Oberflächenverformung [nach (6)] bei. Da φ der Oberflächenbedingung (8) genügen muß, erhält man für $\tilde{\varphi}$ unter Benutzung von (22) [$\varphi^{(w)}$ genügt (8) identisch]

$$-\omega^2\,\tilde{\varphi} + 2\,i\,\omega\,c\,\tilde{\varphi}_x + c^2\,\tilde{\varphi}_{xx} + g\,\tilde{\varphi}_z = -g\,\varphi^{(q)}_z \tag{23}$$

für $z = 0$.

Der Ausdruck $\varphi^{(q)}_z\big|_{z=0}$ läßt sich leicht bestimmen. Es ist bekanntlich

$$-g\,\varphi^{(q)}_z\big|_{z=0} = g\,\frac{Q_0}{\pi}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(2\,n\,H + h)}{x^2 + (2\,n\,H + h)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(2\,n\,H - h)}{x^2 + (2\,n\,H - h)^2}\right]. \tag{24}$$

Die einzelnen Summanden in (24) sind jeweils die von einem symmetrisch zur Oberfläche gelegenen Quell-Senkenpaar an der Oberfläche erzeugten Vertikalgeschwindigkeiten (Abb. 3).

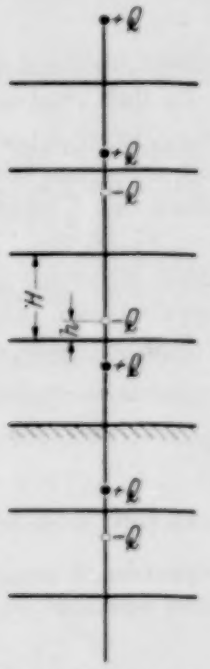


Abb. 3. Erzeugung des Quellpotentials $\varphi^{(q)}$ [Gl. (21)] durch ein gespiegeltes Quell-Senkensystem.

Für $\tilde{\varphi}$ wird folgender Ansatz gemacht:

$$\tilde{\varphi} = \int_0^{\infty}\left(\psi_2(k)\,e^{i\,k\,x} + \psi_1(k)\,e^{-i\,k\,x}\right)\frac{\mathfrak{Coj}\,k\,(z + H)}{\mathfrak{Coj}\,k\,H}\,dk\,. \tag{25}$$

Damit sind (2) und (4) befriedigt. Einsetzen in die Bedingung (23) führt mit (24) auf die Glei-

hung

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty [\psi_2(k)\, f_2(k)\, e^{i\,k\,x} + \psi_1(k)\, f_1(k)\, e^{-i\,k\,x}]\, dk \\ &\qquad = g\,\frac{Q_0}{\pi}\left[\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n\,(2\,n\,H+h)}{x^2+(2\,n\,H+h)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n\,(2\,n\,H-h)}{x^2+(2\,n\,H-h)^2}\right].\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Hierin sind f_1 und f_2 durch (11) und (12) definiert. Gleichung (26) wird nun in folgender Form geschrieben:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \psi_2(k)\, f_2(k)\, e^{i\,k\,x}\, dk + \int_{-\infty}^{0} \psi_1(-k)\, f_1(-k)\, e^{i\,k\,x}\, dk \\ &\qquad = g\,\frac{Q_0}{\pi}\left[\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n\,(2\,n\,H+h)}{x^2+(2\,n\,H+h)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n\,(2\,n\,H-h)}{x^2+(2\,n\,H-h)^2}\right].\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Zur Bestimmung von ψ_1 und ψ_2 aus (27) benutzen wir ein bekanntes Ergebnis aus der Theorie der *Fourier*integrale: Wenn

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\, e^{i\,k\,x}\, dk = \frac{g\,Q_0}{\pi}\,\frac{a}{x^2+a^2}$$

ist, dann gilt

$$F(k) = \frac{g\,Q_0}{\pi}\, e^{-a\,|k|}\,.$$

Wendet man dies auf jeden einzelnen Summanden in (27) an so wird

$$\psi_m(k) = \frac{g\,Q_0}{2\,\pi\, f_m(k)}\left[\sum_{n=0}^{\infty}{}' (-1)^n\, e^{-k\,h}\, e^{-2\,n\,k\,H} - \sum_{n=1}^{\infty}{}' (-1)^n\, e^{k\,h}\, e^{-2\,n\,k\,H}\right] \qquad (m=1,2)\,. \tag{28}$$

Die Summen in (28) sind jetzt einfache geometrische Reihen und können leicht aufsummiert werden mit dem Ergebnis

$$\psi_m(k) = \frac{g\,Q_0}{2\,\pi\, f_m(k)}\,\frac{\mathfrak{Cof}\,k\,(H-h)}{\mathfrak{Cof}\,k\,H} \qquad (m=1,2)\,. \tag{29}$$

Damit wird

$$\tilde{q} = \frac{g\,Q_0}{2\,\pi}\int_0^\infty \left[\frac{e^{i\,k\,x}}{f_2(k)} + \frac{e^{-i\,k\,x}}{f_1(k)}\right]\frac{\mathfrak{Cof}\,k\,(H-h)\,\mathfrak{Cof}\,k\,(H+z)}{\mathfrak{Cof}^2\,k\,H}\, dk\,. \tag{30}$$

Benutzen wir nun für f_1 und f_2 die Darstellungen (17) bzw. (20) und nehmen gleichzeitig eine einfache Partialbruchzerlegung vor, so ergibt sich nach elementarer Rechnung

$$\tilde{q} = \frac{g\,Q_0}{2\,\pi}\int_0^\infty \left[\frac{e^{i\,k\,x}}{f_{34}(k)\,(k_3-k_4)}\left(\frac{1}{k-k_3}-\frac{1}{k-k_4}\right) + \frac{e^{-i\,k\,x}}{f_{12}(k)\,(k_1-k_2)}\left(\frac{1}{k-k_1}-\frac{1}{k-k_2}\right)\right]\frac{\mathfrak{Cof}\,k\,(H-h)\,\mathfrak{Cof}\,k\,(H+z)}{\mathfrak{Cof}^2\,k\,H}\, dk\,. \tag{31}$$

Die hier auftretenden Integrale sind von der Form

$$\int_0^\infty B(k)\,\frac{e^{\pm\,i\,k\,x}}{k-k_s}\, dk \qquad \text{mit} \qquad B(k)\begin{cases} < \infty & \text{in} \quad 0 \le k \le \infty \\ \neq 0 & \text{in} \quad k = k_s\,. \end{cases}$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß folgendes gilt [1].

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty B(k)\,\frac{e^{i\,k\,x}}{k-k_s}\, dk \begin{cases} = +\pi\,i\,B(k_s)\, e^{i\,k_s\,x} + R_1 & \text{für} \quad x>0\,, \\ = -\pi\,i\,B(k_s)\, e^{i\,k_s\,x} + R_2 & \text{für} \quad x<0\,, \end{cases} \\ &\int_0^\infty B(k)\,\frac{e^{-i\,k\,x}}{k-k_s}\, dk \begin{cases} = -\pi\,i\,B(k_s)\, e^{-i\,k_s\,x} + R_3 & \text{für} \quad x>0\,, \\ = +\pi\,i\,B(k_s)\, e^{-i\,k_s\,x} + R_4 & \text{für} \quad x<0\,, \end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

[1] Vgl. z. B. *Lamb*, a. a. O. S. 412. Die dort gegebene Umformung des Integrals läßt sich hier allerdings nicht in gleicher Form anwenden, da der Integrand in (31) auf der imaginären k-Achse singulär wird. Für den Beweis der folgenden Formeln genügt es aber, den Integrationsweg z. B. auf einer Parallelen zur reellen Achse zu schließen, die für kleine $|k|$ in beliebiger Weise in den Nullpunkt geführt wird, aber derart, daß vom Integrationsweg keine Singularitäten umschlossen werden.

wobei $\lim_{|x| \to \infty} R_m = 0 \qquad (m = 1, 2, 3, 4)$.

Da wir uns, wie in der Einleitung angekündigt, nur für die wellenartige Verformung in einiger Entfernung von der Quelle interessieren, wird hier auf eine Diskussion der R_m verzichtet. Eine solche Diskussion kann nach den üblichen Routinemethoden der Analysis vorgenommen werden [1].

Wir führen nun die folgenden Abkürzungen ein:

$$B_{12}(k; z) = \frac{\mathfrak{Cof}\, k\,(H-h)\,\mathfrak{Cof}\, k\,(H+z)}{f_{12}(k)\,\mathfrak{Cof}^2\, k\,H}, \tag{33}$$

und $B_{34}(k; z)$ ganz entsprechend. Dann erhalten wir unter Berücksichtigung von (32) für $x > 0$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\varphi} = \frac{g\,Q_0\,i}{2}\Big\{ &\frac{1}{k_3 - k_4}\,[B_{34}(k_3; z)\,e^{i\,k_3\,x} - B_{34}(k_4; z)\,e^{i\,k_4\,x}] \\ &- \frac{1}{k_1 - k_2}\,[B_{12}(k_1; z)\,e^{-i\,k_1\,x} - B_{12}(k_2; z)\,e^{-i\,k_2\,x}]\Big\} + \varphi_R \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

mit $\lim_{x \to \infty} \varphi_R = 0$. Die Lösung für $x < 0$ erhält man aus (34) durch Vorzeichenvertauschung, indem man also $k_3 - k_4$ durch $k_4 - k_3$ und entsprechend $k_1 - k_2$ durch $k_2 - k_1$ ersetzt. Freilich ändert sich für $x < 0$ das Glied φ_R in der Lösung, doch soll hier nicht darauf eingegangen werden.

Die Wellen mit der Wellenzahl k_1 sind nach Ziff. 2 die einzigen Wellen, die Energie stromaufwärts transportieren. Die in Ziff. 3 angekündigte Ausstrahlungsbedingung befriedigen wir daher, indem wir über $\tilde{\varphi}$ ein Wellenpotential $\varphi^{(w)}$ derart überlagern, daß für $x \geqslant 0$ nur die Wellen mit $k = k_1$ übrigbleiben, für $x \leqslant 0$ nur diejenigen mit $k = k_2, k_3, k_4$. Nach (21) ist dann noch das Quellenpotential $\varphi^{(q)}$ zu addieren, das jedoch nichts zur Oberflächenverformung beiträgt. Wir erhalten dann für $x > 0$

$$\varphi = -\,g\,Q_0\,i\,\frac{B_{12}(k_1; z)}{k_1 - k_2}\,e^{-i\,k_1\,x} + \varphi_R^{+} + \varphi^{(q)} \tag{35}$$

und für $x < 0$

$$\left.\begin{aligned} \varphi = &-\frac{g\,Q_0\,i}{k_3 - k_4}\,[B_{34}(k_3; z)\,e^{i\,k_3\,x} - B_{34}(k_4; z)\,e^{i\,k_4\,x}] \\ &+ \frac{g\,Q_0\,i}{k_2 - k_1}\,B_{12}(k_2; z)\,e^{-i\,k_2\,x} + \varphi_R^{-} + \varphi^{(q)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

wobei $\lim_{x \to \pm\infty} \varphi_R^{\pm} = 0$.

Die Gleichungen (35) und (36) gelten für den Fall, daß (15) zwei voneinander verschiedene, reelle Lösungen hat. Wählt man ω und c derart, daß (15) gar keine reelle Lösung mehr hat, daß also $f_2(k) \neq 0$ in $0 \leq k \leq \infty$, so verschwinden in der Darstellung (35) und (36) die zu k_1 und k_2 gehörigen Wellen. Stromauf werden in diesem Falle gar keine Wellen mehr laufen und stromab nur noch die zu k_3 und k_4 gehörigen. Das Zusammenfallen von k_1 mit k_2 (also der Fall, daß in Abb. 2 die horizontale Gerade $V = c$ die Kurve $V - v\lambda$ in ihrem Maximum berührt) bedeutet $U = c$, da $U > c$ ist für k_1 und $U < c$ für k_2 bei $k_1 \neq k_2$. Andererseits erkennt man dann an (35) und (36), daß unsere linearisierte Theorie über alle Grenzen wachsende Wellenamplituden ergibt. Dieses Verhalten ist typisch für $U = c$. Es tritt bekanntlich auch dann ein, wenn eine in ihrer Wirkung zeitunabhängige Oberflächenstörung mit der Geschwindigkeit $c = \sqrt{g\,H}$ (Grundwellengeschwindigkeit) über ruhendes Wasser bewegt wird [2]; denn dann ist $V = U = c = \sqrt{g\,H}$ für die hinter der Störung sich ausbildenden stehenden Wellen. Dieser Fall kann auch bei unseren Lösungen für $\omega = 0$, $c = \sqrt{g\,H}$ eintreten, worauf hier ausdrücklich, aber ohne weitere Diskussion hingewiesen sei.

5. Spezialisierung auf die in ruhendem Wasser pulsierende Quelle und die langsam pulsierende Quelle. Wir betrachten jetzt den Grenzfall $c = 0$, $\omega \neq 0$, also die in ruhendem Wasser pulsierende Quelle. Es ist dann $k_1 = k_3$, $k_2 = k_4 = 0$. Man erhält für $x > 0$

$$\varphi = -\,g\,Q_0\,i\,\frac{B_{12}(k_1; z)}{k_1}\,e^{-i\,k_1\,x} + \varphi_R^{+} + \varphi^{(q)}\,. \tag{37}$$

Für $x < 0$ ist die Lösung symmetrisch hierzu [(35) und (36) unterscheiden sich dann zwar formal um eine Konstante, aber das ändert nur den willkürlichen Nullpunkt des Potentials]. Die Deutung von

[1] Vgl. *Lamb*, a. a. O. oder *Holstein*, a. a. O.
[2] Vgl. *Lamb*, a. a. O. S. 409, 414.

(37) ist klar: nach beiden Seiten laufen von der Quelle harmonische Wellen mit der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k_1$ weg.

Der andere Grenzfall ist $c \neq 0$, $\omega \to 0$. Es gehen dann k_1, k_3 und die zugehörigen Oberflächenverformungen ebenfalls $\to 0$. Wir betrachten im folgenden daher nur die zu k_2 und k_4 gehörigen, nicht verschwindenden Potentiale. Für $\omega = 0$ sei $k_2 = k_4 = k_0$.

Dann wird für $\omega \to 0$

$$\begin{aligned} k_2 &= k_0 - \Delta k + \cdots \\ k_4 &= k_0 + \Delta k + \cdots \end{aligned} \qquad (\Delta k > 0),$$

wobei $\lim_{\omega \to 0} \Delta k = 0$ und die Punkte Glieder höherer Ordnung andeuten. Das Potential Φ wird dann

$$\left.\begin{aligned} \Phi - c\,x = &- g\,Q_0\,i\,e^{i\,\omega\,t}\,\frac{B_{31}(k_0+\Delta k;\,z)}{k_0+\Delta k-k_3}\,e^{i\,(k_0+\Delta k)\,x} \\ &+ g\,Q_0\,i\,e^{i\,\omega\,t}\,\frac{B_{34}(k_0-\Delta k;\,z)}{k_0-\Delta k-k_1}\,e^{-i\,(k_0-\Delta k)\,x} + \Phi_R\,. \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

In Φ_R sind hier sowohl diejenigen Anteile des Potentials zusammengefaßt, die mit wachsendem $|x|$ gegen Null gehen, als auch solche, die mit Δk bzw. k_1 und k_3 verschwinden. Spaltet man auch in den beiden ersten Summanden in (38) die mit Δk bzw. k_1 und k_3 klein werdenden Anteile ab, so erhält man nach kurzer Rechnung

$$\Phi - c\,x = 2\,g\,Q_0\,\frac{B_{31}(k_0;\,z)}{k_0}\,e^{i\,\omega\left(t+\frac{x}{\omega/\Delta k}\right)}\sin k_0\,x + \tilde{\Phi}_R; \qquad (39)$$

hierin hat $\omega/\Delta k$ einen wohldefinierten Grenzwert. Zu seiner Bestimmung knüpfen wir an Abb. 4 an:

$$2\,v\lambda = 2\,|\Delta\lambda|\,\frac{dV}{d\lambda}\,.$$

Nach der Definition von k und λ ist andrerseits

$$|\Delta\lambda| = \frac{\lambda^2}{2\pi}\,\Delta k\,,$$

also

$$\Delta k = \frac{\omega}{\lambda\,\dfrac{dV}{d\lambda}}\,. \qquad (40)$$

Benutzt man die Definition der Gruppengeschwindigkeit U

$$U = V - \lambda\,\frac{dV}{d\lambda}\,, \qquad (41)$$

so erhält man aus (40)

$$\frac{\omega}{\Delta k} = V - U$$

oder, da $V = c$ für $\omega = 0$ ist,

$$\lim_{\omega \to 0}\,\frac{\omega}{\Delta k} = c - U\,. \qquad (42)$$

Gleichung (39) geht dann über in

$$\Phi - c\,x = 2\,g\,Q_0\,\frac{B_{31}(k_0;\,z)}{k_0}\,e^{i\,\omega\left(t+\frac{x}{c-U}\right)}\sin k_0\,x + \tilde{\Phi}_R \qquad (43)$$

für $x < 0$. Dieses Ergebnis ist einfach zu deuten: Für $\omega = 0$ erhält man stehende Wellen stromabwärts von der Quelle mit der Wellenlänge $\lambda_0 = 2\pi/k_0$, wobei λ_0 bzw. k_0 durch die Bedingung $V(\lambda_0) = c$ festgelegt sind. Wenn nun $\omega \neq 0$, aber noch genügend klein ist, so bleiben die stehenden Wellen im wesentlichen erhalten, ihre Amplitude wird aber mit der Kreisfrequenz ω moduliert. Bemerkenswerterweise kommt diese Modulation in einer Entfernung $|x|$ von der Störquelle mit einer der Signalgeschwindigkeit $c - U$ entsprechenden Phasenverschiebung an. Dies ist einleuchtend, da $c - U$ diejenige Geschwindigkeit ist, mit der die Energie in dem stehenden Wellenzug (relativ zu einem ruhenden Beobachter) stromabwärts transportiert wird.

6. Spezialisierung auf einen unendlich tiefen Strom. Es ist wohl angebracht, hier darauf hinzuweisen, daß man bei numerisch vorgegebenen Werten von H, h, ω und c die Zahlenwerte von k_1,

k_2, k_3, k_4 und $f_{12}(k)$, $f_{34}(k)$ unschwer ermitteln kann; dann sind nach (33) auch die Funktionen B_{12} bzw. B_{34} bekannt. Am einfachsten dürfte für die numerische Bestimmung ein graphisches Verfahren sein, wie es durch Abb. 2 nahegelegt wird.

Für den Sonderfall $H = \infty$ kann man leicht analytische Ausdrücke für k_m, f_{ik}, B_{ik} finden; es wird dann nämlich [1]

$$f_{12} = f_{34} = c^2 , \tag{44}$$

$$B_{12} = B_{34} = \frac{1}{c^2} e^{-k(h-z)} , \tag{45}$$

$$k_{1,2} = \frac{g - 2\omega c}{2c^2}\left[1 \mp \sqrt{1 - \left(\frac{2\omega c}{g - 2\omega c}\right)^2}\right], \tag{46}$$

$$k_{3,4} = \frac{g + 2\omega c}{2c^2}\left[1 \mp \sqrt{1 - \left(\frac{2\omega c}{g + 2\omega c}\right)^2}\right]. \tag{47}$$

Die Wurzeln $k_{1,2}$ sind reell und voneinander verschieden, wenn

$$\omega c < \frac{g}{4} \tag{48}$$

ist. Diese Bedingung läßt sich übrigens leicht an jedem nicht zu schnell fließenden und nicht zu seichten Bach nachprüfen, dessen Oberfläche man periodisch, z. B. durch periodisches Eintauchen eines Stockes stört. Man stellt dann leicht fest, daß nur dann Wellen direkt stromaufwärts laufen, wenn Bedingung (48) erfüllt ist.

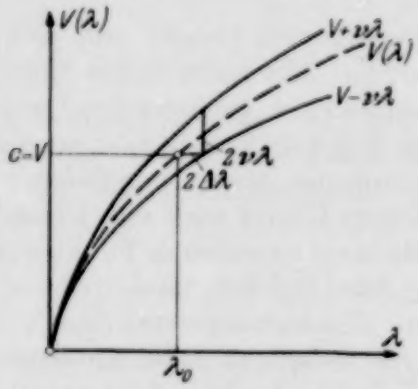


Abb. 4. Zusammenrücken der Lösungen 2 und 4 im Grenzfall $\omega \to 0$.

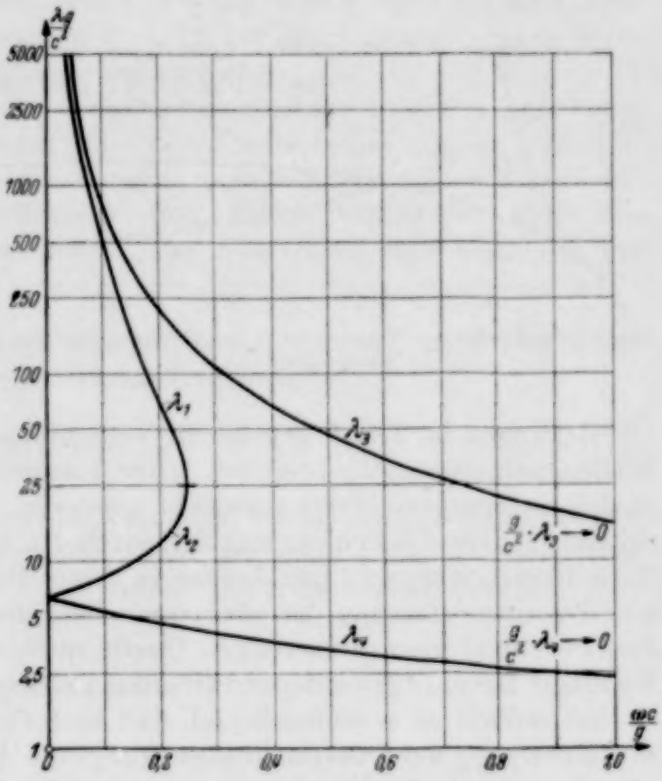


Abb. 5. Länge der Wellen 1 bis 4 (in dimensionsloser Darstellung) in Abhängigkeit von $\omega c/g$.

Durch (44) bis (47) sind alle in (35) und (36) vorkommenden, von k_m abhängigen Größen durch ω und c ausgedrückt. In Abb. 5 sind für die vier von der Quelle weglaufenden Wellenzüge die Wellenlängen und in Abb. 6 die Amplituden in Abhängigkeit von $\omega\, c/g$ dargestellt. Für den Grenzfall $c = 0$ erhält man nach einer einfachen Rechnung

$$\Phi - c\,x = Q_0\, i\, e^{-(h-z)\frac{\omega^2}{g}} e^{i\left(\omega t + \frac{\omega^2}{g} x\right)} + \Phi_R \tag{49}$$

für $x > 0$. Hieraus ergibt sich als Oberflächenverformung (6)

$$\zeta = -Q_0 \frac{\omega}{g} e^{-\frac{h\omega^2}{g}} \cos\left(\omega t + \frac{\omega^2}{g} x\right) + \zeta_R \tag{50}$$

mit $\lim_{x \to \infty} \zeta_R = 0$. Für $x < 0$ ist ζ symmetrisch hierzu. Gleichung (50) stimmt mit dem Ergebnis von *Holstein* überein.

Für $\omega = 0$, d. h. für die stationäre Quelle in einem unendlich tiefen Strom erhält man

$$\zeta = -\frac{2g}{c} Q_0\, e^{-\frac{hg}{c^2}} \cos\frac{g}{c^2} x + \zeta_R \tag{51}$$

[1] Vgl. Fußnote 1 von S. 69.

für $x < 0$; $\lim_{x \to -\infty} \zeta_R = 0$. Für $x > 0$ fällt die wellenartige Verformung aus. Aus (51) läßt sich leicht die Lösung für einen Dipol herleiten, die von Bedeutung ist für die Umströmung eines eingetauchten Zylinders [1].

7. Ausblick. Abschließend sei bemerkt, daß man selbstverständlich durch Integration über linien- oder flächenhafte Quellverteilungen die betrachteten Lösungen verallgemeinern kann. Abgesehen von möglichen Interferenzeffekten, die zwar die Wellenamplituden, nicht aber die durch die

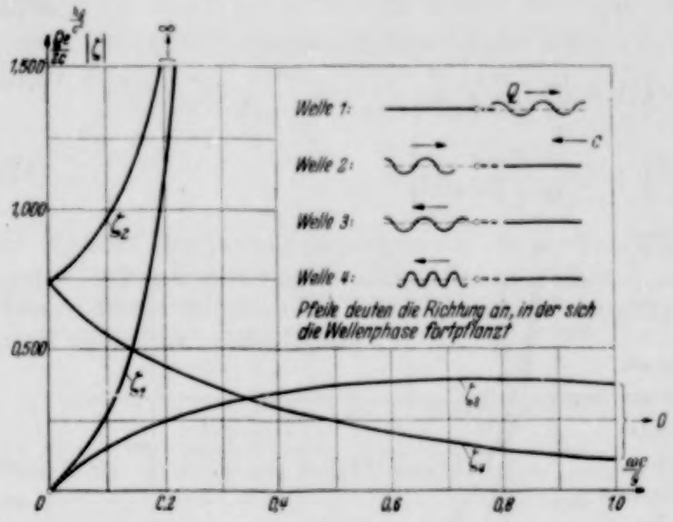


Abb. 6. Amplituden der Wellen 1 bis 4 (in dimensionsloser Darstellung) in Abhängigkeit von $\omega c/g$.

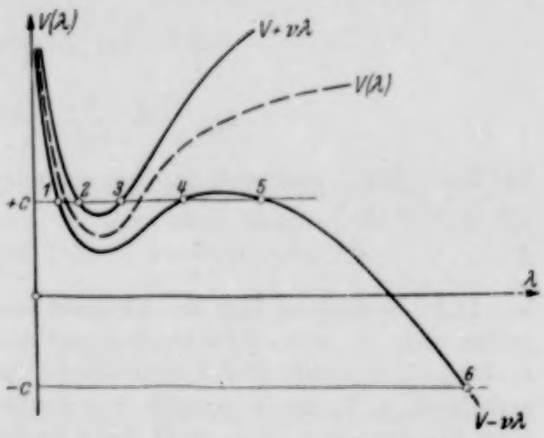


Abb. 7. Übersicht über die zu wellenförmiger Oberflächenverformung führenden Lösungen bei Berücksichtigung der Oberflächenspannung.

Überlegungen in Ziff. 3 gegebenen Wellenlängen beeinflussen können, ergibt sich jedoch für die Wellenausbreitung, die in dieser Arbeit besonders interessiert hat, hierdurch nichts Neues. Es wird in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen, daß das Problem einer pulsierenden Quelle von Bedeutung ist für die Behandlung der durch die Schwingungen eingetauchter Körper erzeugten Oberflächenverformungen. Ein Anfang in dieser Richtung wurde in der Arbeit von *Holstein* gemacht; eine Zusammenfassung der seitherigen Bemühungen auf diesem Gebiet wird von *Ursell*[2] gegeben. Das Potential einer pulsierenden Quelle spielt dort die Rolle einer *Green*schen Funktion. Die dem Verfasser bekanntgewordenen Arbeiten beschränken sich jedoch auf den Sonderfall $c = 0$.[3]

Schließlich ist es einleuchtend, daß auch für allgemeinere Dispersionsgesetze (also z. B. bei Berücksichtigung der Oberflächenspannung) die Ausbreitung der Wellen, freilich nicht auch ihre Amplituden, durch die Überlegungen von Ziff. 3 bestimmt sein wird. In Abb. 7 ist angedeutet, daß man bei Berücksichtigung der Oberflächenspannung nach Maßgabe der dann für Wasserwellen gültigen Dispersionskurve statt der vier Wellenzüge wie seither u. U. deren sechs zu erwarten hat.

(Eingegangen am 7. Juli 1955.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *E. Becker*, Göttingen, Bunsenstraße 10.

[1] Vgl. Fußnote 3 von S. 69.
[2] *F. Ursell*, Quart. Journ. Mech. and Applied Math., 8, (1954), S. 427.
[3] Vgl. Fußnote 1 von S. 69.

Über gesteuerte Abkühl- und Anwärmvorgänge bei festen Körpern

Von **A. Kneschke**

1. Einleitung. Der Abkühlvorgang eines bereits aus der Schmelze erstarrten Körpers ist von technischer Bedeutung. Er wird in seinem Verlauf von außen dadurch gesteuert, daß die Temperatur $\varphi(t)$ der den Körper umgebenden Luftgrenzschicht zeitlich monoton fallend geändert wird. Der damit verbundene Wärmeentzug bedingt eine instationäre Temperaturverteilung im Körper, deren Kenntnis für die Durchführung der Kühlung wesentlich ist. Entsprechend ist der Verlauf des gesteuerten Anwärmvorganges.

In beiden Fällen wird von einem vollständigen Temperaturausgleich zwischen dem Außenraum und dem Körperinneren ausgegangen, so daß für den Abkühlvorgang dem Körper die konstante Anfangstemperatur T_a, dem Außenraum die Temperatur $\varphi(0) = T_a$, für den Anwärmvorgang dementsprechend die Anfangstemperaturen Null und $\varphi(0) = 0$ zukommen.

Im folgenden soll für beide Wärmeleitvorgänge die Temperaturverteilung in einem beliebigen Körper, der zur Zeit $t = 0$ auf konstanter Temperatur ist, unter dem Einfluß einer zeitlich veränderlichen Außentemperatur $\varphi(t)$ ermittelt und aus der beiden Vorgängen zugrundeliegenden Randwertaufgabe ein allgemein anwendbares Verfahren hergeleitet werden. Dabei wollen wir unsere Betrachtungen an den gesteuerten Abkühlvorgang anschließen. Der Anwärmvorgang wird, wie wir sehen werden, gleichzeitig mit erfaßt.

2. Formulierung der Randwertaufgabe. Im Inneren des Körpers K vom Volumen V gilt für die Temperatur $T(P, t)$ im Punkte P die *Fourier*sche Wärmeleitgleichung

$$D\{T\} \equiv \frac{\partial T}{\partial t} - a^2 \Delta T = 0 \,, \tag{1}$$

wobei a^2 die Temperaturleitzahl des Körpers bedeutet. Im Falle des Wärmeüberganges in die den Körper umgebende Luftschicht erhält die Randbedingung, wenn wir unter λ die Wärmeleitzahl und unter α die Wärmeübergangszahl verstehen, für n als äußere Normale der Körperoberfläche F die Form

$$L\{T\}_F \equiv \left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial n} + T\right)_F = \varphi(t) \qquad (t \geq 0) \,. \tag{2}$$

3. Lösung der Randwertaufgabe. Wir setzen

$$T(P, t) = T_0(P, t) + T_1(P, t)$$

und führen damit die gestellte Aufgabe auf die beiden Ausgleichsprobleme

$$\left.\begin{aligned} D\{T_0(P, t)\} &= 0 \,, \quad T_0(P, 0) = T_a \,, \\ L\{T_0(P, t)\}_F &= 0 \qquad (t > 0) \end{aligned}\right| \tag{a}$$

und

$$\left.\begin{aligned} D\{T_1(P, t)\} &= 0, \quad T_1(P, 0) = 0 \,, \\ L\{T_1(P, t)\}_F &= \varphi(t) \qquad (t > 0) \end{aligned}\right| \tag{b}$$

zurück.

Die Aufgabe (a) beschreibt einen natürlichen (ungesteuerten) Abkühlvorgang, bei dem der Körper mit der konstanten Anfangstemperatur T_a seinen Wärmeinhalt an die Umgebung der Temperatur Null abgibt. Sie wird durch den Ansatz

$$T_0(P, t) = e^{-a^2\delta^2 t}\, u(P)$$

auf die Integration von

$$\Delta u + \delta^2 u = 0 \,, \quad \left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial n} + u\right)_F = 0$$

zurückgeführt. Bekanntlich besitzt dieses homogene Randwertproblem abzählbar unendlich viele reelle Eigenwerte, die sich im Endlichen nicht häufen. Je zwei zu verschiedenen Eigenwerten δ_r^2

gehörige Eigenfunktionen $u_\nu(P)$ sind zueinander orthogonal, und jede zweimal stetig differentiierbare Funktion, die den Randbedingungen genügt, läßt sich in eine gleichmäßig konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen $u_\nu(P)$ entwickeln. Damit wird

$$T_0(P,t) = T_a \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu u_\nu(P)\, e^{-a^2\delta_\nu^2 t}\,, \tag{3}$$

so daß sich für die normierten Eigenfunktionen die *Fourier*koeffizienten

$$A_\nu = \int_K u_\nu(P)\, dv$$

ergeben.[1]

Die Integration von Ausgleichsproblemen von der Art der Aufgabe (b) kann man mittels eines Satzes von *Duhamel*[2] durchführen. Danach wird die Lösung durch ein Integral der Form

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \varphi(\tau)\, G(P, t-\tau)\, d\tau$$

dargestellt. Für unsere Zwecke ist es vorteilhaft, den *Duhamel*schen Integralansatz durch ein Glied $\varphi(t)\, G(P,0)$ zu erweitern, so daß wir

$$T_1(P,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \varphi(\tau)\, G(P, t-\tau)\, d\tau - \varphi(t)\, G(P,0)$$

setzen. Nach Ausführung der Differentiation und nachfolgender Teilintegration wird dann

$$T_1(P,t) = \varphi(0)\, G(P,t) + \int_0^t \varphi'(\tau)\, G(P, t-\tau)\, d\tau - \varphi(t)\, G(P,0)\,. \tag{4}$$

Wir erkennen daraus, daß die Funktion $\varphi(\tau)\, G(P, t-\tau)$, physikalisch betrachtet, die Temperatur zur Zeit t in einem Punkte P des Körpers wiedergibt, die unter dem Einfluß der Außentemperatur $\varphi(\tau)$ im Laufe der Zeit $t-\tau$ entstanden ist. $G(P,t)$ hat also den Charakter einer Einflußfunktion, deren physikalische Bedeutung sich sofort zeigen wird. Der Ansatz (4) befriedigt bereits die Anfangsbedingung $T_1(P,0) = 0$. Aus

$$D\{T_1(P,t)\} = \varphi(0)\, D\{G(P,t)\} + \int_0^t \varphi'(\tau)\, D\{G(P,t-\tau)\}\, d\tau + \varphi(t)\, a^2\, \Delta G(P,0) = 0$$

folgt, wenn $D\{G(P,t)\} = 0$ gesetzt wird, die Bedingung $\Delta G(P,0) = 0$. Die Randbedingung ist entsprechend

$$L\{T_1(P,t)\}_F = \varphi(0)\, L\{G(P,t)\}_F + \int_0^t \varphi'(\tau)\, L\{G(P,t-\tau)\}_F\, d\tau - \varphi(t)\, L\{G(P,0)\}_F = \varphi(t)$$

dann erfüllt, wenn für jedes $t > 0$

$$L\{G(P,t)\}_F = 0\,, \quad G(P,0) = -1$$

ist. Wir erhalten damit für die Einflußfunktion $G(P,t)$ die Randwertaufgabe

$$D\{G(P,t)\} = 0\,, \quad G(P,0) = -1\,,$$
$$L\{G(P,t)\}_F = 0 \qquad (t > 0)\,.$$

Sie ist von der Art der Aufgabe (a). Es gilt mithin

$$G(P,t) = -\frac{T_0(P,t)}{T_a}\,, \quad G(P,t-\tau) = -\frac{T_0(P,t-\tau)}{T_a}\,.$$

Die Funktion $-G(P,t)$ ist demnach die Temperaturverteilung, die durch einen natürlichen Abkühlvorgang mit der Anfangstemperatur der Einheit im Körper gegen den Außenraum mit der Temperatur Null hervorgerufen wird.

---

[1] Derartige natürliche Wärmeleitvorgänge sind behandelt bei *H. S. Carslaw*, Introduction to the mathematical theory of the conduction of heat in solids, London 1921; *Gröber-Erk-Grigull*, Die Grundgesetze der Wärmeübertragung, 3. Aufl., Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955; *F. Berger*, Z. angew. Math. Mech. 11 (1931) S. 45 und 8 (1928) S. 479.

[2] Vgl. *R. Courant* u. *D. Hilbert*, Methoden d. mathematischen Physik, Bd. 2, S. 183, Berlin 1937.

Auf Grund von (4) lautet die Lösung der ursprünglichen Aufgabe

$$T(P,t) = T_0(P,t) + \varphi(t) - \varphi(0)\,\frac{T_0(P,t)}{T_a} - \int_0^t \varphi'(\tau)\,\frac{T_0(P,t-\tau)}{T_a}\,d\tau\,.$$

Im Falle der Abkühlung ist hierin $\varphi(0) = T_a$, für den Anwärmvorgang, der durch die Aufgabe (b) wiedergegeben wird, ist $T_0(P,t) \equiv 0$ und $\varphi(0) = 0$ zu setzen. Damit wird in beiden Fällen die Temperaturverteilung im Inneren des Körpers durch

$$T(P,t) = \varphi(t) - \int_0^t \varphi'(\tau)\,\frac{T_0(P,t-\tau)}{T_a}\,d\tau \tag{5}$$

dargestellt. Die Lösung des gesteuerten Abkühl- bzw. Anwärmvorganges ist also auf die Lösung des zugehörigen ungesteuerten (natürlichen) Abkühlvorganges zurückgeführt. Darin liegt die physikalische Bedeutung des Ergebnisses (5).

Setzen wir (3) in (5) ein, so lautet die Lösung

$$T(P,t) = \varphi(t) - \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu\,u_\nu(P)\cdot\int_0^t \varphi'(\tau)\,e^{-a^2\delta_\nu^2(t-\tau)}\,d\tau\,. \tag{6}$$

Durch Teilintegration erhält sie die Form

$$T(P,t) = \varphi(t) - \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_\nu u_\nu(P)}{a^2\delta_\nu^2}\left[\varphi'(t) - \varphi'(0)\,e^{-a^2\delta_\nu^2 t} - \int_0^t \varphi''(\tau)\,e^{-a^2\delta_\nu^2(t-\tau)}\,d\tau\right]. \tag{6a}$$

Der Wärmefluß Φ durch die Körperoberfläche F ergibt sich aus dem Wärmeinhalt

$$Q(t) = c\gamma\int_K T(P,t)\,dv = c\gamma\,V\varphi(t) - c\gamma\sum_{\nu=1}^{\infty}A_\nu^2\int_0^t\varphi'(\tau)\,e^{-a^2\delta_\nu^2(t-\tau)}\,d\tau$$

durch Differentiation nach der Zeit t und Berücksichtigung der Beziehung $V = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu^2$. Er beträgt

$$\Phi(t) = \lambda\sum_{\nu=1}^{\infty}A_\nu^2\,\delta_\nu^2\int_0^t\varphi'(\tau)\,e^{-a^2\delta_\nu^2(t-\tau)}\,d\tau\,. \tag{7}$$

Durch Teilintegration wird daraus

$$\Phi(t) = c\gamma\sum_{\nu=1}^{\infty}A_\nu^2\left[\varphi'(t) - \varphi'(0)\,e^{-a^2\delta_\nu^2 t} - \int_0^t\varphi''(\tau)\,e^{-a^2\delta_\nu^2(t-\tau)}\,d\tau\right]. \tag{7a}$$

Temperaturverteilung und Wärmefluß in der Form (6a) und (7a) lassen in dem Zeitfaktor

$$Z_\nu(t) = \varphi'(t) - \varphi'(0)\,e^{-a^2\delta_\nu^2 t} - \int_0^t\varphi''(\tau)\,e^{-a^2\delta_\nu^2(t-\tau)}\,d\tau$$

ihre Abhängigkeit von der Geschwindigkeit φ' und Beschleunigung φ'' der Kühlung bzw. Anwärmung erkennen.

4. Anwendungsmöglichkeiten. a) Es soll die Temperaturverteilung eines unendlich langen Kreiszylinders vom Halbmesser R und der konstanten Anfangstemperatur T_a bei dem einfachen Fall der linearen Abkühlung

$$\varphi(t) = T_a - \dot{\varphi}\,t$$

mit der Kühlgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ ermittelt werden.

Für den natürlichen Abkühlvorgang erhält man aus der Integrationsaufgabe unter Verwendung der *Besselsc*hen Funktionen bekanntlich[1] die Temperaturverteilung

$$T_0(r,t) = 2\,T_a\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{J_1(c_\nu)}{c_\nu\,(J_0^2(c_\nu)+J_1^2(c_\nu))}\,J_0\left(\frac{c_\nu}{R}\,r\right)e^{-a^2\frac{c_\nu^2}{R^2}\,t}\,.$$

Dabei sind die c_ν-Werte die Wurzeln der transzendenten Gleichung

$$\frac{J_0(c)}{J_1(c)} = \frac{\lambda\,c}{\alpha\,R}\,.$$

[1] Vgl. *Gröber-Erk-Grigull*, a. a. O. S. 53.

Aus (5) ergibt sich sofort die gesuchte Temperaturverteilung zu

$$T(r,t) = T_a - \dot{q}\,t + \frac{2R^2\dot{q}}{a^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}{}' \frac{J_1(c_\nu)\cdot J_0\left(\frac{c_\nu}{R}r\right)}{c_\nu^3\,(J_0^2(c_\nu)+J_1^2(c_\nu))}\left(1-e^{-a^2\frac{c_\nu^2}{R^2}t}\right).$$

Die Übertemperatur $\Delta T(r,t) = T(r,t) - q(t)$ einer beliebigen Stelle im Zylinder zur jeweiligen Temperatur $q(t)$ des Außenraumes strebt mit wachsender Zeit t dem Wert

$$\lim_{t\to\infty}\Delta T(r,t) = \frac{2R^2\dot{q}}{a^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}{}' \frac{J_1(c_\nu)}{c_\nu^3(J_0^2(c_\nu)+J_1^2(c_\nu))}\,J_0\left(\frac{c_\nu}{R}r\right)$$

zu. Die hierbei auftretende Reihe läßt sich summieren; es ist

$$\lim_{t\to\infty}\Delta T(r,t) = \frac{\dot{q}}{4a^2}\left(R^2+\frac{2\lambda R}{\alpha}-r^2\right).$$

In der gleichen einfachen Weise lassen sich mittels der Integraldarstellung (5) für andere Körperformen auch im Falle nichtlinearer Kühlung bzw. Anwärmung die Temperaturverteilungen ermitteln. Setzt man $q(t)$ z. B. als periodische Funktion an, so ist man in der Lage, den für Regeneratoren grundlegenden Wert des Ausnutzungsgrades wärmespeichernder Körper zu bestimmen. Über die Auswertung des hier angegebenen Verfahrens für die technischen Belange soll später ausführlich berichtet werden.

b) Die Lösung in der Form (5) ist auch dann brauchbar, wenn der Verlauf von $T_0(P,t)$ nicht analytisch festliegt, sondern für einen bestimmten Punkt des Körpers empirisch durch einen natürlichen Abkühlversuch ermittelt worden ist. Der Temperaturunterschied

$$\Delta T(P,t) = -\int_{0}^{\tau=t} q'(\tau)\,\frac{T_0(P,t-\tau)}{T_a}\,d\tau = -\int_{0}^{t'=t} q'(t-t')\,\frac{T_0(P,t')}{T_a}\,dt'$$

ist dann durch die von

$$-q'(t-t')\,\frac{T_0(P,t')}{T_i}$$

und der t'-Achse begrenzte Fläche für jeden festen Zeitpunkt t bestimmt. Das angegebene Verfahren ist mithin auch auf die gesteuerte Abkühlung oder Anwärmung von Körpern anwendbar, die einer analytischen Behandlung nicht zugänglich sind.

(Eingegangen am 11. Juli 1955.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr.-Ing. *A. Kneschke*, Freiberg/Sa., Richard-Wagner-Str. 13.

Hydromechanische Grundlagen für die Behandlung von stationären und instationären Grundwasserströmungen

II. Mitteilung

Von G. Heinrich und K. Desoyer

In einer vorangegangenen Arbeit[1] wurde die Theorie der Grundwasserströmungen einerseits auf die Behandlung von instationären Flüssigkeitsbewegungen, andererseits auf den Fall anisotroper inhomogener Festkörper erweitert. Es sollen nun die in der angegebenen Arbeit durchgeführten Betrachtungen dahingehend verallgemeinert werden, daß die dort getroffene Voraussetzung punktförmiger Berührung der Körner des Festkörpers fallen gelassen wird und das Problem auf allgemeine Festkörperskelette erweitert wird.

Wir betrachten für das folgende ein zeitlich unveränderliches ruhendes Festkörperskelett, von dem wir nur voraussetzen, daß auf makroskopischen Flächenelementen jedes nicht speziell geführten (statistischen) Schnittes das Verhältnis der von Flüssigkeit bedeckten Fläche zur gesamten Fläche des Elementes als Funktion des Ortes angegeben werden kann. Dies setzt eine statistische Verteilung der Festkörpersubstanz voraus. Es ist dabei gleichgültig, ob das Festkörperskelett aus einem einheitlichen Stoff besteht, oder ob es aus verschiedenen Komponenten zusammengesetzt ist (z. B. bei Beton aus Füllmasse und Zementpaste).

Für ein makroskopisches Flächenelement der Hüllfläche sei λ das Verhältnis des von Flüssigkeit bedeckten Anteils der Fläche zur gesamten Fläche. Diese Größe wird für verschiedene Arten von Schnitten (statistische Schnitte oder speziell ausgesuchte Schnitte) verschiedene Werte annehmen. Wir zeigen zunächst, daß auch für anisotrope Festkörper für statistische Schnitte λ gleich sein muß dem relativen Porenvolumen n. Dazu betrachten wir ein durch statistische Schnitte herausgetrenntes quaderförmiges makroskopisches Volumelement mit den Kantenlängen dx, dy, dz in einem beliebig orientierten Koordinatensystem (x, y, z). Die in diesem Quader enthaltene Flüssigkeitsmenge $n\,dx\,dy\,dz$ muß sich nun auf drei Arten ermitteln lassen: bezeichnen $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ die λ-Werte für die statistischen Schnittflächen senkrecht zu den Kantenrichtungen x, y, z, so muß gelten

$$n\,dx\,dy\,dz = \lambda_x\,dx\;dy\;dz = \lambda_y\,dy\;dx\;dz = \lambda_z\,dz\;dx\;dy\,.$$

Hieraus erkennt man, daß, auch für anisotrope Festkörper, für statistische Schnitte

$$\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda = n \tag{1}$$

gilt (Verallgemeinerung des sog. *Delesse*schen Gesetzes[2]).

Für spezielle (nichtstatistische) Schnitte gilt (1) i. a. nicht. Auch solche Schnitte sind jedoch praktisch von Bedeutung. So wird man z. B. bei der Beurteilung der Rutschgefahr bei körnigen Festkörpern von vornherein nur solche (nichtstatistische) Schnittflächen betrachten, die die Körner des Festkörpers nicht durchschneiden, sondern durch deren Berührungsflächen hindurchgehen. Wir wollen daher im folgenden, um auch diese Möglichkeit zu erfassen, mit einer zunächst offengelassenen Größe λ rechnen, die wir auch bei anisotropen Festkörpern als richtungsunabhängig voraussetzen, die aber ortsabhängig sein kann.

Wir denken uns durch eine beliebige (statistische oder speziell ausgewählte) geschlossene Schnittfläche einen endlichen Teil des Gemisches (Festkörper und Flüssigkeit) herausgegriffen und wollen, ähnlich wie in der ersten Arbeit, die Kräfte, die auf den im Inneren dieser Hüllfläche befindlichen Flüssigkeits- bzw. Festkörper wirken, analysieren, um die Bewegungsgleichungen bzw. Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen. Im Gegensatz zu der Behandlung in der ersten Arbeit erscheint es für die vorliegende Verallgemeinerung erforderlich, die von Flüssigkeit bedeckten Teile der äußeren Hüllfläche mit sämtlichen im Innern befindlichen Flüssigkeitsgrenzflächen gegen das Festkörperskelett zusammenzufassen. Diese Fläche umschließt dann den ganzen herausgegriffenen Flüssigkeitskörper. Bedeutet $d\mathfrak{o}_{a\,Fl}$ ein von Flüssigkeit bedecktes vektorielles Oberflächenelement der Hüllfläche (nach außen orientiert) und $d\mathfrak{o}_i$ ein Oberflächenelement der inneren Grenzflächen der

---

[1] *G. Heinrich* u. *K. Desoyer*, Ing.-Arch. 23 (1955), S. 73. Bei Verweis auf Gleichungen dieser Arbeit wird den betreffenden Gleichungsnummern der Hinweis I. vorangestellt.

[2] *A. Delesse*, Annales des mines (4) 13 (1848), S. 379.

Flüssigkeit (gegen den Festkörper orientiert), dann ist die Resultante aller auf diesen Flächen auf die Flüssigkeit einwirkenden Normaldrücke gegeben durch

$$-\int p\, d\mathfrak{o}_{a\,Fl} - \int p\, d\mathfrak{o}_i ,$$

wobei p den Druck in der Flüssigkeit bedeutet. Da diese Grenzoberfläche den Flüssigkeitskörper vollständig einhüllt, kann man den *Gauß*schen Satz anwenden und erhält

$$\int p\, d\mathfrak{o}_{a\,Fl} + \int p\, d\mathfrak{o}_i = \int \nabla p\, dV_{Fl} = \int \nabla p \cdot n\, dV , \tag{2}$$

wobei dV_{Fl} ein Volumelement des Flüssigkeitskörpers, dV ein Volumelement des Gemisches bedeutet. Die übrigen Kräfte werden ebenso eingeführt wie in der ersten Arbeit und zwar $\mathfrak{R}_W$ als die von der Hautreibung am Festkörperskelett herrührende auf die Flüssigkeit wirkende Quasivolumkraft, bezogen auf die Volumeinheit des Gemisches. Wie bereits in der ersten Arbeit gezeigt wurde, heben sich die auf den von Flüssigkeit bedeckten Teil der Hüllfläche wirkenden Reibungskräfte bei der makroskopischen Mittelwertsbildung auf. Ferner ist ∇U die Schwerkraft, bezogen auf die Masseneinheit. Es gilt dann

$$\int \left(-n \nabla p + \mathfrak{R}_W - \frac{\gamma_W}{g} n \nabla U \right) dV = 0 , \tag{3}$$

wo γ_W das spezifische Gewicht der Flüssigkeit und g die Fallbeschleunigung bedeutet.

Da das obige Integral für jedes beliebige Volumen verschwinden muß, so erhält man durch Nullsetzen des Integranden

$$\mathfrak{R}_W = n \left(\nabla p + \frac{\gamma_W}{g} \nabla U \right) . \tag{4}$$

Da (4) mit (I. 1) übereinstimmt, spielt also die Voraussetzung der Punktberührung der Körner für die Bewegung der Flüssigkeit überhaupt keine Rolle. Es bleiben daher alle Gleichungen der ersten Arbeit, die sich auf die Bewegung der Flüssigkeit beziehen, auch für den verallgemeinerten Fall unverändert.

Um die Gleichgewichtsbedingungen für den herausgeschnittenen Anteil des Festkörperskeletts aufzustellen, denken wir uns, ähnlich wie in der vorangegangenen Arbeit, die Schnittspannungen, die im Festkörperanteil der äußeren Hüllfläche wirken, in der makroskopischen Betrachtung über das ganze makroskopische Hüllflächenelement gemittelt. Der in einem solchen Element herrschende Spannungszustand kann durch Einführung eines symmetrischen Spannungstensors $\mathfrak{S}$ dargestellt werden. Bei körniger Festkörperstruktur können zur Beurteilung der Rutschgefahr spezielle (nichtstatistische) Schnitte so gelegt werden, daß keines der Körner geschnitten wird. In diesem Fall stellt $\mathfrak{S}$ den Spannungstensor der Korn-zu-Korn-Kräfte dar. Bei statistischen Schnitten (hier wird das Festkörpermaterial durchschnitten) stellt $\mathfrak{S}$ den statistisch gemittelten Spannungstensor im Festkörpermaterial dar. Dieser statistische Mittelwert des Spannungstensors ist überall dort maßgebend, wo es auf das elastische oder plastische Verhalten des Festkörpers ankommt. Dies wird später noch begründet.

Die Gleichgewichtsbedingung für den herausgeschnittenen Teil des Festkörperskeletts lautet

$$\int \mathfrak{S} \cdot d\mathfrak{o}_a - \int \mathfrak{R}_W\, dV + \int p\, d\mathfrak{o}_i - \int \frac{\gamma_K}{g} (1-n) \nabla U\, dV = 0 . \tag{5}$$

Hier bedeutet $d\mathfrak{o}_a$ den nach außen gerichteten Vektor eines Hüllflächenelementes. Das zweite und dritte Integral sind die Reaktionen der betreffenden auf den Flüssigkeitskörper wirkenden Kräfte [vgl. (3)]. Das letzte Glied stellt die auf den Festkörperanteil wirkende Massenkraft (Schwerkraft) dar. γ_K ist das spezifische Gewicht des Festkörpermaterials.

Aus der Bedeutung der oben eingeführten Größe λ ergibt sich der Zusammenhang

$$d\mathfrak{o}_{a\,Fl} = \lambda\, d\mathfrak{o}_a . \tag{6}$$

Aus (2) folgt dann

$$\int p\, d\mathfrak{o}_i = \int \nabla p \cdot n\, dV - \int p\, \lambda\, d\mathfrak{o}_a$$

und daraus mit Hilfe des *Gauß*schen Satzes

$$\int p\, d\mathfrak{o}_i = \int [n \nabla p - \nabla (\lambda p)]\, dV . \tag{7}$$

Durch Einsetzen von (7) in (5) ergibt sich nach Anwendung des *Gauß*schen Satzes auf das erste Integral von (5)

$$\int \left[\nabla \cdot \mathfrak{S} - \mathfrak{R}_W - (1-n) \frac{\gamma_K}{g} \nabla U + (n-\lambda) \nabla p - p \nabla \lambda \right] dV = 0 . \tag{8}$$

Da dieses Integral für jedes herausgegriffene Volumen verschwinden muß erhält man durch Nullsetzen des Integranden und Verwendung von (4)

$$\nabla \cdot \mathfrak{S} = \lambda \nabla p + \frac{\gamma_K - n(\gamma_K - \gamma_W)}{g} \nabla U + p \nabla \lambda . \tag{9}$$

$\nabla \cdot \mathfrak{S}$ stellt die auf die Raumeinheit bezogene Resultante der Schnittkräfte im Festkörperskelett dar.

Bei körniger Struktur des Festkörpermaterials ist für punktförmige Berührung der Körner $\lambda = 1$ zu setzen, wenn Schnitte durch die Berührungspunkte der Körner betrachtet werden. Dann geht (9) in die Gleichung (I. 3) über:

$$\nabla \cdot \mathfrak{S} = \nabla p + \frac{\gamma_K - n(\gamma_K - \gamma_W)}{g} \nabla U . \tag{9a}$$

Für statistische Schnitte ($\lambda = n$) nimmt (9) die Form an

$$\nabla \cdot \mathfrak{S} = n \nabla p + \frac{\gamma_K - n(\gamma_K - \gamma_W)}{g} \nabla U + p \nabla n . \tag{9b}$$

Damit ist eine alte Streitfrage aufgeklärt, die in der hydraulischen Literatur bis heute noch nicht bereinigt werden konnte, die Frage nämlich, ob bei der Wirkung der strömenden Flüssigkeit auf den Festkörper der Druckgradient in voller Stärke oder mit dem Faktor n versehen einzuführen ist[1]. Es ist dies also lediglich davon abhängig, ob der betrachtete Schnitt statistisch geführt oder durch die Berührungszonen der Körner hindurch gelegt wird.

Analog wie in der vorangegangenen Arbeit kann man den Druck p in (9) durch die Standrohrspiegelhöhe h ausdrücken gemäß (I. 11)

$$\frac{U}{g} + \frac{p}{\gamma_W} = h \tag{10}$$

und erhält

$$\nabla \cdot \mathfrak{S} = \lambda \gamma_W \nabla h + \left(\gamma_K - \frac{\lambda - n}{1 - n} \gamma_W\right) \frac{1 - n}{g} \nabla U + \gamma_W \left(h - \frac{U}{g}\right) \nabla \lambda \tag{11}$$

mit (I. 12)

$$\nabla h = - \mathfrak{K}^{-1} \cdot v . \tag{12}$$

Aus (11) und (12) erkennt man, daß die auf die Volumeinheit des Gemisches bezogene resultierende Schnittkraft im Festkörperskelett sich aus drei Anteilen zusammensetzt: der erste Anteil rührt von der Strömung der Flüssigkeit her. Der zweite Anteil entspricht dem Gewicht des Festkörperskeletts, das um einen i. a. reduzierten Auftrieb vermindert ist. Im Falle der Punktberührung ist für ausgewählte Schnitte durch die Berührpunkte ($\lambda = 1$) der volle Auftrieb wirksam. In diesem Fall stimmt (11) mit (I. 48), bei deren Ableitung diese vorausgesetzt wurde, überein. Für statistische Schnitte ($\lambda = n$) verschwindet der Auftrieb zur Gänze, unabhängig davon, ob Punktberührung vorliegt oder nicht. Für ausgewählte Schnitte mit $\lambda < n$ wechselt der Auftrieb das Vorzeichen.

In allen Fällen also, in denen es auf statistische Mittelwerte der Spannungen im Festkörperskelett ankommt (z. B. wenn man Spannungs–Dehnungs-Beziehungen verwendet, um das elastische oder plastische Verhalten des Festkörpers zu untersuchen), darf, wie (11) zeigt, nicht mit einem Auftrieb gerechnet werden, da in diesem Fall der Festkörper statistisch zu schneiden ist ($\lambda = n$).

Letzteres ergibt sich aus der folgenden Überlegung: In einer Kontinuumstheorie können die Deformationen bzw. Deformationsgeschwindigkeiten nur einen Zusammenhang mit den Schnittspannungen besitzen, sie können aber nicht direkt in Zusammenhang gebracht werden mit zusätzlichen Kräften wie z. B. Druckkräften, die von der Flüssigkeit auf das Skelett wirken. Außerdem muß verlangt werden, daß der Zusammenhang zwischen den Deformationen bzw. Deformationsgeschwindigkeiten und den Schnittspannungen im trockenen und flüssigkeitserfüllten Skelett derselbe bleibt, um die im trockenen Zustand ermittelten Materialkonstanten in beiden Fällen verwenden zu können. Man muß daher die Schnitte so führen, daß im flüssigkeitserfüllten Skelett keine zusätzlichen die Schnittspannungen ändernden Auftriebskräfte auftreten. Diese Bedingung erfüllt nur der statistische Schnitt.

---

[1] Vgl. *K. Terzaghi*, Erdbaumechanik, S. 128, Leipzig und Wien 1925, wo der Druckgradient in voller Stärke eingeführt wird, und *E. Mayer-Peter, H. Favre, R. Müller*, Schweiz. Bauz. 108 (1936) S. 37, wo der Druckgradient mit dem Faktor n versehen ist.

Es sind daher alle in der Literatur vorhandenen Ansätze, die in diesen Fällen ein Auftriebsglied enthalten, fehl am Platze.[1]

Der dritte Anteil in (11) tritt nur bei ortsabhängigem λ auf. Praktisch von Bedeutung ist vor allem der Fall, daß man für zwei längs einer Fläche aneinander grenzende Festkörperskelette mit zwei verschiedenen λ-Werten (λ_1 und λ_2) längs dieser Fläche zu rechnen hat.

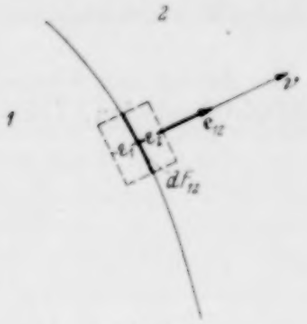


Abb. 1.

Es sei $\mathfrak{e}_{12}$ der Einheitsvektor senkrecht zur Fläche, vom Körper 1 in den Körper 2 weisend. Wir ersetzen zunächst die Unstetigkeit von λ durch einen stetigen Übergang $\lambda = \lambda(\nu)$ im Intervall $\nu = -\varepsilon_1$ bis $\nu = \varepsilon_2$ und gehen dann zur Grenze $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$ über. Wir errichten über einem Flächenelement dF_{12} der Grenzfläche einen kleinen Zylinder mit der Höhe $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ (s. Abb. 1). Bildet man nun das Volumintegral von $\lambda_W \left(h - \frac{U}{g}\right) V\lambda$ [drittes Glied von (11)] über diesen Zylinder und führt den angegebenen Grenzübergang aus, so erhält man bei Beachtung von (10)

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \int_{\nu=-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \gamma_W \left(h - \frac{U}{g}\right) V\lambda \, dF_{12} \, d\nu = \lim \int p \, V\lambda(\nu) \, dF_{12} \, d\nu = \mathfrak{e}_{12} \, dF_{12} \lim \int p \frac{\partial \lambda}{\partial \nu} \, d\nu = \mathfrak{e}_{12} \, dF_{12} \, p(\lambda_1 - \lambda_2). \quad (13)$$

Ist also die Resultante aller Schnittkräfte, die längs einer geschlossenen Hüllfläche auf das Festkörperskelett wirken, zu bestimmen, so gilt, wenn im Inneren Unstetigkeitsflächen obiger Art vorkommen, gemäß (11) und (13)

$$\sum_j \int_{V_j} (V \cdot \mathfrak{S}) \, dV_j = \sum_j \int_{V_j} \left[\lambda_j \gamma_W \, Vh + \left(\gamma_{K\,j} - \frac{\lambda_j - n_j}{1 - n_j} \gamma_W\right) \frac{1 - n_j}{g} \, VU\right] dV_j$$

$$+ \sum_j \int_{V_j} \gamma_W \, p \, V\lambda_j \, dV_j + \sum_{\substack{j,l \\ j<l}} \int_{F_{jl}} \mathfrak{e}_{jl} \, p \, (\lambda_j - \lambda_l) \, dF_{jl} \,. \quad (14)$$

Dabei sind die Volumintegrale über die durch die Unstetigkeitsflächen F_{jl} voneinander abgegrenzten Einzelvolumina V_j zu nehmen. Das letzte Integral ist über alle Unstetigkeitsflächen zu bilden. Bei ortsabhängigem λ beeinflußt also der absolute Druck p in der Flüssigkeit die inneren Spannungen im Festkörperskelett.

(Eingegangen am 11. Juli 1955.)

Anschrift der Verfasser: Prof. Dr. *G. Heinrich* und Dr. *K. Desoyer*, Wien IV, Karlsplatz 13, Technische Hochschule.

[1] Siehe z. B. *F. Tölke*, Ing.-Arch. 2 (1931), S. 295ff. Vgl. auch die Polemik zwischen *P. Fillunger* und *O. Hoffmann* in „Die Wasserwirtschaft" (1929) Heft 18, 20, 21, 33, (1930) Heft 4, 25, die keine endgültige Klärung brachte.

Die Knickformeln für den Stab mit n Teilstücken konstanter Biegesteifigkeit

Von S. Falk

1. Einleitung. Knickformeln für den abgesetzten Stab mit nur zwei Teilstücken sind in der technischen Literatur seit langem bekannt; für drei und mehr Teilstücke jedoch findet man höchstens noch stark symmetrische Stäbe durchgerechnet[1]. In der vorliegenden Arbeit werden nun die Knickformeln für den Stab mit beliebig vielen Feldern hergeleitet und an zwei einfachen Beispielen vorgeführt.

2. Der gewöhnliche Knickstab. Für den gewöhnlichen Knickstab mit konstanter Längskraft P und konstanter Biegesteifigkeit EJ (Abb. 1) gilt die Differentialgleichung

$$y''''(x) + \nu^2\, y''(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \nu^2 = \frac{P}{EJ} \qquad (\nu^2 \neq 0); \tag{1}$$

mit den vier linear unabhängigen Lösungen 1, x, $\cos \nu x$ und $\sin \nu x$. Wählt man als Integrationskonstanten Durchbiegung y_0, Neigung y_0', Biegemoment M_0 und Querkraft Q_0 am linken Balkenende ($x = x_0$), so lautet die Lösung von (1) mitsamt den ersten drei Ableitungen

$$\left.\begin{aligned}
y(x) &= y_0 + (x - x_0)\, y_0' + \frac{\cos \nu (x - x_0) - 1}{P}\, M_0 + \frac{\sin \nu (x - x_0) - \nu (x - x_0)}{P \nu}\, Q_0 \\
y'(x) &= y_0' - \frac{\nu \sin \nu (x - x_0)}{P}\, M_0 + \frac{\cos \nu (x - x_0) - 1}{P}\, Q_0, \\
-EJ\, y'' = M(x) &= \cos \nu (x - x_0)\, M_0 + \frac{1}{\nu} \sin \nu (x - x_0)\, Q_0, \\
-EJ\, y''' = Q(x) &= -\nu \sin \nu (x - x_0)\, M_0 + \cos \nu (x - x_0)\, Q_0
\end{aligned}\right| \tag{2}$$

oder, indem wir die Koeffizienten dieses linearen Gleichungssystems zur „Feldmatrix" $\mathfrak{F}(x)$ und die Größen y, y', M und Q zum „Vektor" $\mathfrak{y}$ zusammenfassen,

$$\mathfrak{y}(x) = \mathfrak{F}(x)\, \mathfrak{y}_0 . \tag{3}$$

Abb. 1. Gewöhnlicher Knickstab mit konstanter Biegefestigkeit EJ und konstanter Längskraft P.

Setzen wir $x = x_0$ ein, so geht die Feldmatrix in die Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ über, wie man in (2) leicht nachprüft. Es ist also $\mathfrak{y}(x_0) = \mathfrak{E}\, \mathfrak{y}_0 = \mathfrak{y}_0$, wie es sein muß. Dagegen wird für $x = x_1$

$$\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{F}(x_1)\, \mathfrak{y}_0 \equiv \mathfrak{L}\, \mathfrak{y}_0 . \tag{4}$$

Hier ist $\mathfrak{L} \equiv \mathfrak{F}(x_1)$ die sogenannte „Leitmatrix", die nach (4) den linearen Zusammenhang von Durchbiegung, Neigung, Biegemoment und Querkraft an beiden Enden des Stabes vermittelt; man erhält sie, indem man in dem Koeffizientenschema des Systems (2) $x = x_1$ einsetzt; und zwar wird wegen $x_1 - x_0 = l$

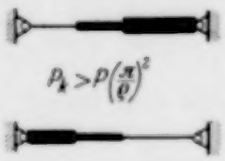
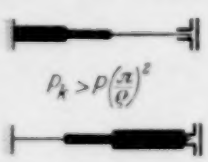
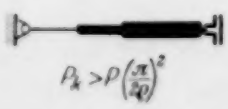
$$\mathfrak{L} \equiv \mathfrak{F}(x_1) = \begin{pmatrix} 1 & l & (\cos \nu l - 1)/P & (\sin \nu l - \nu l)/P\nu \\ 0 & 1 & -\nu \sin \nu l/P & (\cos \nu l - 1)/P \\ 0 & 0 & \cos \nu l & \frac{1}{\nu} \sin \nu l \\ 0 & 0 & -\nu \sin \nu l & \cos \nu l \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Je nach Art der Lagerung des Stabes treten zur Differentialgleichung (1) noch vier Randbedingungen; sind diese linear und homogen in den Integrationskonstanten, so hat (1) nur dann eine von $y(x) \equiv 0$ verschiedene Lösung, d. h. der Stab kann nur dann ausknicken, wenn die Determinante D dieses Gleichungssystems verschwindet; somit ist $D = 0$ eine Bestimmungsgleichung für die Kraft P, und die in der Praxis meist allein interessierende kleinste positive Wurzel dieser transzendenten Gleichung heißt die Knicklast P_k.

[1] Eine große Anzahl solcher Formeln findet man zusammengestellt bei *A. Pflüger*, Stabilitätsprobleme der Elastostatik. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1950, S. 249—267.

Besonders einfach sind nun solche Stützungen des Stabes, die an jedem Ende das Verschwinden zweier der Größen y, y', M, Q verlangen; in der Leitmatrix $\mathfrak{L}$ sind dann offenbar lediglich zwei Spalten und zwei Zeilen zu streichen, und die verbleibende Unterdeterminante zweiter Ordnung ergibt, gleich Null gesetzt, bereits die gesuchte Knickbedingung für P. Die Tabelle 1 zeigt sechs einfache solcher Lagerungen mit den zugehörigen Randbedingungen; die eingeklammerten Bedingungen am rechten Ende in b) und e) sind bereits durch die bequemeren dritten Bedingungen links mit erfüllt, somit überflüssig, wovon man sich leicht überzeugt. Die Nummern oberhalb der Stabenden geben an, welche Spalten und Zeilen in der Leitmatrix $\mathfrak{L}$ (5) zu streichen sind. Die gleich Null gesetzten verbleibenden zwei- bzw. einreihigen Unterdeterminanten findet man in der zweiten Spalte der Tabelle zusammengestellt; die ersten vier von ihnen sind die bekannten *Euler*schen Knickbedingungen.

Tabelle 1.

Art der Stützung mit Randbedingungen. Nummern der in $\mathfrak{L}$ zu streichenden Spalten / Zeilen	Knickformeln für ein Feld	Knickformeln für n Felder	Untere Schranke für die Knicklast P_k mit $\varrho = \nu_1 l_1 + \cdots + \nu_n l_n$ (alle $\nu_i \neq 0$)
a) 1 3 / 2 4; $y=0$ $M=0$ / $y=0$ $M=0$	$\dfrac{\sin \nu l}{\nu} = 0$	$\dfrac{\tilde{s}_n}{\nu_n} = 0$	$P_k > P\left(\dfrac{\pi}{\varrho}\right)^2$ 
b) 1 2 4 / 1 2 4; $y=0$ $y'=0$ $Q=0$ / $M=0$ $(Q=P y')$	$\cos \nu l = 0$	$\hat{c}_n = 0$	$P_k > P\left(\frac{\pi}{2\varrho}\right)^2$
c) 1 2 / 3 4; $y=0$ $y'=0$ / $y=0$ $y'=0$	$2 - 2\cos \nu l = \nu l \sin \nu l$ d. h. $\cos \nu l = 1$	$(\hat{c}_n - 1)(\tilde{c}_n - 1) + \hat{s}_n \tilde{s}_n = \nu_n l \hat{s}_n$ oder wegen (13) $2 - (\hat{c}_n + \tilde{c}_n) = \nu_n l \hat{s}_n$	—
d) 1 2 / 2 4; $y=0$ $y'=0$ / $y=0$ $M=0$	$\operatorname{tg} \nu l = \nu l$	$\dfrac{\tilde{s}_n}{\hat{c}_n} = \nu_n l$	—
e) 1 2 4 / 1 3 4; $y=0$ $y'=0$ $Q=0$ / $y'=0$ $(Q=0)$	$\nu \sin \nu l = 0$	$\nu_n \cdot \hat{s}_n = 0$	$P_k > P\left(\frac{\pi}{\varrho}\right)^2$ 
f) 1 3 / 1 3; $y=0$ $M=0$ / $y'=0$ $Q=0$	$\cos \nu l = 0$	$\tilde{c}_n = 0$	$P_k > P\left(\frac{\pi}{2\varrho}\right)^2$ 

3. Der Knickstab mit n Teilstücken. Nun sei ein Stab mit abschnittsweise verschiedener, aber konstanter Biegesteifigkeit EJ_i nach Abb. 2 gegeben. In jedem Teilstück gilt natürlich nach wie vor die Differentialgleichung (1), jedoch mit verschiedenen Parametern ν_i. Feld- und Leitmatrix

haben daher immer noch die Form (2) bzw. (5), nur ist jetzt v durch v_i und $x - x_0$ durch $x - x_{i-1}$ bzw. l durch l_i zu ersetzen. Da nun an jeder Feldgrenze Durchbiegung, Neigung, Biegemoment und Querkraft stetig ineinander übergehen, ist einfach

$$\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{L}_1 \mathfrak{y}_0 , \qquad \mathfrak{y}_2 = \mathfrak{L}_2 \mathfrak{y}_1 , \quad \cdots$$
$$\mathfrak{y}_n = \mathfrak{L}_n \mathfrak{y}_{n-1} . \tag{6}$$

Abb. 2. Mehrteiliger Knickstab; Längskraft P im gesamten Stab konstant, Biegesteifigkeit EJ_i stückweise konstant.

also

$$\mathfrak{y}_n = \underbrace{\mathfrak{L}_n \mathfrak{L}_{n-1} \cdots \mathfrak{L}_2 \mathfrak{L}_1}\, \mathfrak{y}_0 \tag{7}$$

oder

$$\mathfrak{y}_n = \mathfrak{P}_n \mathfrak{y}_0 . \tag{8}$$

Die Gleichung (8) aber hat dieselbe Form wie (4), und das heißt, daß in der Produktmatrix $\mathfrak{P}_n$ die gleichen Spalten und Zeilen zu streichen sind wie in der Leitmatrix $\mathfrak{L}$ des gewöhnlichen Knickstabes, womit zumindest formal das Problem des n-teiligen Stabes auf diesen zurückgeführt ist.

Wir multiplizieren jetzt nach (7) die ersten beiden Leitmatrizen miteinander und bekommen mit den Abkürzungen $\cos v_1 l_1 = c_1$, $\sin v_1 l_1 = s_1$, $\cos v_2 l_2 = c_2$ und $\sin v_2 l_2 = s_2$

$$\mathfrak{L}_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & l_1 & \dfrac{c_1 - 1}{P} & \dfrac{s_1 - v_1 l_1}{P v_1} \\ 0 & 1 & \dfrac{-v_1 s_1}{P} & \dfrac{c_1 - 1}{P} \\ 0 & 0 & c_1 & s_1 / v_1 \\ 0 & 0 & -v_1 s_1 & c_1 \end{pmatrix}; \qquad \mathfrak{L}_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & l_2 & \dfrac{c_2 - 1}{P} & \dfrac{s_2 - v_2 l_2}{P v_2} \\ 0 & 1 & \dfrac{-v_2 s_2}{P} & \dfrac{c_2 - 1}{P} \\ 0 & 0 & c_2 & s_2 / v_2 \\ 0 & 0 & -v_2 s_2 & c_2 \end{pmatrix};$$

$$\mathfrak{L}_2 \mathfrak{L}_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & l_1 + l_2 & \dfrac{\left(c_1 c_2 - \dfrac{v_1}{v_2} s_1 s_2\right) - 1}{P} & \dfrac{\left(c_1 s_2 + \dfrac{v_2}{v_1} s_1 c_2\right) - v_2 (l_1 + l_2)}{P v_2} \\ 0 & 1 & \dfrac{-v_2 \left(c_1 s_2 + \dfrac{v_1}{v_2} s_1 c_2\right)}{P} & \dfrac{\left(c_1 c_2 - \dfrac{v_2}{v_1} s_1 s_2\right) - 1}{P} \\ 0 & 0 & \left(c_1 c_2 - \dfrac{v_1}{v_2} s_1 s_2\right) & \left(c_1 s_2 + \dfrac{v_2}{v_1} s_1 c_2\right) / v_2 \\ 0 & 0 & -v_2 \left(c_1 s_2 + \dfrac{v_1}{v_2} s_1 c_2\right) & \left(c_1 c_2 - \dfrac{v_2}{v_1} s_1 s_2\right) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Man erkennt, daß die Produktmatrix $\mathfrak{L}_2 \mathfrak{L}_1$ die gleiche Form hat wie $\mathfrak{L}_2$ und $\mathfrak{L}_1$, nur treten statt der gewöhnlichen Funktionen sin und cos gewisse allgemeinere Funktionen auf, für die wir geeignete Bezeichnungen einführen wollen. Mit den Abkürzungen

$$c_i = \cos v_i l_i , \qquad s_i = \sin v_i l_i , \qquad \tilde{l}_i = l_i + \cdots l_2 + l_1 , \qquad \hat{e}_i = \frac{v_i}{v_{i+1}} , \qquad \tilde{e}_i = \frac{v_{i+1}}{v_i} \tag{10}$$

schreiben wir

$$\left.\begin{aligned} \hat{c}_i &= \hat{c}_{i-1} c_i - \hat{e}_{i-1} \hat{s}_{i-1} s_i , & \hat{s}_i &= \hat{c}_{i-1} s_i + \hat{e}_{i-1} \hat{s}_{i-1} c_i , \\ \tilde{c}_i &= \tilde{c}_{i-1} c_i - \tilde{e}_{i-1} \tilde{s}_{i-1} s_i , & \tilde{s}_i &= \tilde{c}_{i-1} s_i + \tilde{e}_{i-1} \tilde{s}_{i-1} c_i . \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Insbesondere sei

$$\left.\begin{aligned} \hat{c}_0 &= \tilde{c}_0 = 1 , & \hat{s}_0 &= \tilde{s}_0 = 0 , \\ \hat{c}_1 &= \tilde{c}_1 = c_1 = \cos v_1 l_1 , & \hat{s}_1 &= \tilde{s}_1 = s_1 = \sin v_1 l_1 . \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

dann ist

Außerdem besteht ein leicht zu bestätigender Zusammenhang, der an den Satz des Pythagoras erinnert:

$$\hat{c}_i \tilde{c}_i + \hat{s}_i \tilde{s}_i = \hat{c}_{i-1} \tilde{c}_{i-1} + \hat{s}_{i-1} \tilde{s}_{i-1} = \cdots = \hat{c}_1 \tilde{c}_1 + \hat{s}_1 \tilde{s}_1 = \hat{c}_0 \tilde{c}_0 + \hat{s}_0 \tilde{s}_0 = 1 . \tag{13}$$

Da nun, wie ein Blick auf (9) zeigt, auch bei allen weiteren Multiplikationen die Form der Produktmatrix erhalten bleibt, läßt sich mit den durch (11) eingeführten Funktionen direkt die in (8) be-

nötigte Matrix $\mathfrak{P}_n$ angeben:

$$\mathfrak{P}_n = \begin{Vmatrix} 1 & l & \dfrac{\hat{c}_n - 1}{P} & \dfrac{\tilde{s}_n - \nu_n l}{P \nu_n} \\ 0 & 1 & \dfrac{-\nu_n \hat{s}_n}{P} & \dfrac{\tilde{c}_n - 1}{P} \\ 0 & 0 & \hat{c}_n & \tilde{s}_n/\nu_n \\ 0 & 0 & -\nu_n \hat{s}_n & \tilde{c}_n \end{Vmatrix} \left(l = \sum_{i=1}^{n} l_i \right). \tag{14}$$

Sie stimmt äußerlich bis auf sie Zeichen ^ und ~ genau mit der Leitmatrix eines gewöhnlichen Knickstabes überein, und damit sind auch schon die in der dritten Spalte der Tabelle 1 angegebenen verallgemeinerten Knickbedingungen gefunden. Die Faktoren ν_n in e) und $1/\nu_n$ in a) sind dabei nicht etwa überflüssig, da ja der n-te Abschnitt des Balkens durchaus starr sein kann ($\nu_n = \sqrt{P/EJ_n} = 0$ wegen $EJ_n = \infty$), worauf man gegebenenfalls achten muß.

Interessiert schließlich auch die Biegelinie des Stabes selbst, so setzt man die berechnete Knicklast in die Leitmatrizen $\mathfrak{L}_i$ ein, berechnet nach (6) die Vektoren $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots \mathfrak{y}_n$ und hat damit die Biegelinie im Felde i als erste Komponente des Vektors

$$\mathfrak{y}_i(x) = \mathfrak{F}_i(x)\, \mathfrak{y}_{i-1}. \tag{15}$$

4. Die explizite Darstellung der Knickformeln. Um nun die in den Knickformeln auftretenden Ausdrücke (11) in eine handliche Form zu bringen, kann man zwei Wege einschlagen:

a) Wir dividieren die Formeln (11) nach jedem Rekursionsschritt durch den Faktor $c_i = \cos \nu_i l_i$, dann entsteht mit den Abkürzungen

$$p_i = c_1 c_2 \ldots c_i, \qquad \hat{c}_i^* = \frac{\hat{c}_i}{p_i}, \qquad \tilde{c}_i^* = \frac{\tilde{c}_i}{p_i}, \qquad \hat{s}_i^* = \frac{\hat{s}_i}{p_i}, \qquad \tilde{s}_i^* = \frac{\tilde{s}_i}{p_i}, \qquad \operatorname{tg} \nu_i l_i = t_i \tag{16}$$

das leichter zu übersehende Formelsystem

$$\left.\begin{aligned} \hat{c}_i^* &= \hat{c}_{i-1}^* - \hat{e}_{i-1} t_i \hat{s}_{i-1}^*, & \hat{s}_i^* &= \hat{c}_{i-1}^* t_i + \hat{e}_{i-1} \hat{s}_{i-1}^*, \\ \tilde{c}_i^* &= \tilde{c}_{i-1}^* - \tilde{e}_{i-1} t_i \tilde{s}_{i-1}^*, & \tilde{s}_i^* &= \tilde{c}_{i-1}^* t_i + \tilde{e}_{i-1} \tilde{s}_{i-1}^*. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Die ersten drei Funktionen $\hat{c}_i^*$ und $\hat{s}_i^*$ sind zum Beispiel

$$\left.\begin{aligned} \hat{c}_1^* &= 1 & \hat{s}_1^* &= t_1, \\ \hat{c}_2^* &= 1 - \hat{e}_1 t_2 t_1, & \hat{s}_2^* &= t_2 + \hat{e}_1 t_1, \\ \hat{c}_3^* &= 1 - \hat{e}_1 t_2 t_1 - \hat{e}_2 t_3 (t_2 + \hat{e}_1 t_1), & \hat{s}_3^* &= (1 - \hat{e}_1 t_2 t_1) t_3 + \hat{e}_2 (t_2 + \hat{e}_1 t_1) \end{aligned}\right\} \tag{17a}$$

usw., $\tilde{c}_i^*$ und $\tilde{s}_i^*$ genauso, wenn man $\hat{e}_i$ durch $\tilde{e}_i$ ersetzt. Oder noch deutlicher mit den gegebenen Werten ν_i und den ausführlich hingeschriebenen Produkten p_i aus (16)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\hat{c}_1}{c_1} &= 1, & \frac{\nu_1 \hat{s}_1}{c_1} &= \nu_1 t_1, \\ \frac{\hat{c}}{c_1 c_2} &= 1 - \nu_1 t_1 \frac{t_2}{\nu_2}, & \frac{\nu_2 \hat{s}_2}{c_1 c_2} &= \nu_1 t_1 + \nu_2 t_2, \\ \frac{\hat{c}_3}{c_1 c_2 c_3} &= 1 - \nu_1 t_1 \frac{t_2}{\nu_2} - (\nu_1 t_1 + \nu_2 t_2) \frac{t_3}{\nu_3}, & \frac{\nu_3 \hat{s}_3}{c_1 c_2 c_3} &= \nu_1 t_1 + \nu_2 t_2 + \nu_3 t_3 - \nu_1 t_1 \frac{t_2}{\nu_2} \nu_3 t_3 \end{aligned}\right\} \tag{17b}$$

usw.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\tilde{c}_1}{c_1} &= 1, & \frac{\tilde{s}_1}{\nu_1 c_1} &= \frac{t_1}{\nu_1}, \\ \frac{\tilde{c}_2}{c_1 c_2} &= 1 - \frac{t_1}{\nu_1} \nu_2 t_2, & \frac{\tilde{s}_2}{\nu_2 c_1 c_2} &= \frac{t_1}{\nu_1} + \frac{t_2}{\nu_2}, \\ \frac{\tilde{c}_3}{c_1 c_2 c_3} &= 1 - \frac{t_1}{\nu_1} \nu_2 t_2 - \left(\frac{t_1}{\nu_1} + \frac{t_2}{\nu_2}\right) \nu_3 t_3, & \frac{\tilde{s}_3}{\nu_3 c_1 c_2 c_3} &= \frac{t_1}{\nu_1} + \frac{t_2}{\nu_2} + \frac{t_3}{\nu_3} - \frac{t_1}{\nu_1} \nu_2 t_2 \frac{t_3}{\nu_3} \end{aligned}\right\} \tag{17c}$$

usw.

b) Mit Hilfe der Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} 2(\cos\alpha \cos\beta - k \sin\alpha \sin\beta) &= (1+k)\cos(\alpha+\beta) + (1-k)\cos(\alpha-\beta), \\ 2(\cos\alpha \sin\beta + k \sin\alpha \cos\beta) &= (1+k)\sin(\alpha+\beta) + (1-k)\sin(\alpha-\beta) \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

gehen die Formeln (11) über in

$$\left.\begin{aligned} 2\,\hat{c}_i &= (1+\hat{e}_{i-1})\,\hat{c}^{\oplus}_{i-1} + (1-\hat{e}_{i-1})\,\hat{c}^{\ominus}_{i-1}\,, & 2\,\hat{s}_i &= (1+\hat{e}_{i-1})\,\hat{s}^{\oplus}_{i-1} + (1-\hat{e}_{i-1})\,\hat{s}^{\ominus}_{i-1}\,,\\ 2\,\tilde{c}_i &= (1+\tilde{e}_{i-1})\,\tilde{c}^{\oplus}_{i-1} + (1-\tilde{e}_{i-1})\,\tilde{c}^{\ominus}_{i-1}\,, & 2\,\tilde{s}_i &= (1+e_{i-1})\,\tilde{s}^{\oplus}_{i-1} + (1-\tilde{e}_{i-1})\,\tilde{s}^{\ominus}_{i-1}\,, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

wobei die Symbole $\oplus$ und $\ominus$ bedeuten, daß sämtliche in den Ausdrücken $\hat{c}_{i-1}$, $\tilde{c}_{i-1}$, $\hat{s}_{i-1}$ und $\tilde{s}_{i-1}$ vorkommenden Argumente δ

$$\text{im Falle des Zeichens } \left\{\begin{matrix}\oplus \text{ durch } \nu_i l_i + \delta\\ \ominus \text{ durch } \nu_i l_i - \delta\end{matrix}\right\} \text{ zu ersetzen sind.}$$

Für die ersten vier $\hat{c}_i$ zum Beispiel erhalten wir mit der vorübergehenden Abkürzung $\nu_i l_i = i$

$$\left.\begin{aligned} 1\,\hat{c}_1 &= \cos(1)\,.\\ 2\,\hat{c}_2 &= (1+\hat{e}_1)\cos(2+1) + (1-\hat{e}_1)\cos(2-1)\,.\\ 4\,\hat{c}_3 &= (1+\hat{e}_2)\,[(1+\hat{e}_1)\cos(3+2+1) + (1-\hat{e}_1)\cos(3+2-1)]\\ &\quad + (1-\hat{e}_2)\,[(1+\hat{e}_1)\cos(3-2-1) + (1-\hat{e}_1)\cos(3-2+1)]\,.\\ 8\,\hat{c}_4 &= (1+\hat{e}_3)\,\{(1+\hat{e}_2)\,[(1+\hat{e}_1)\cos(4+3+2+1) + (1-\hat{e}_1)\cos(4+3+2-1)]\\ &\quad + (1-\hat{e}_2)\,[(1+\hat{e}_1)\cos(4+3-2-1) + (1-\hat{e}_1)\cos(4+3-2+1)]\}\,.\\ &\quad + (1-\hat{e}_3)\,\{(1+\hat{e}_2)\,[(1+\hat{e}_1)\cos(4-3-2-1) + (1-\hat{e}_1)\cos(4-3-2+1)]\\ &\quad (1-\hat{e}_2)\,[(1+\hat{e}_1)\cos(4-3+2+1) + (1-\hat{e}_1)\cos(4-3+2-1)]\}\,, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

usw., $\hat{s}_i$ bzw. $\tilde{c}_i$, $\tilde{s}_i$ genauso, wenn man die Zeichen cos durch sin, bzw. $\hat{e}_i$ durch $\tilde{e}_i$ ersetzt.

Da in (17) lauter Produkte von trigonometrischen Funktionen auftreten, werden die Ausdrücke (19) als reine Summen von cos- bzw. sin-Funktionen im allgemeinen praktischer sein, zumal sie sich durch ein umlaufendes Vektordiagramm leicht veranschaulichen lassen. Die Anzahl der Summanden beträgt in (17) wie in (19) 2^{n-1}, allerdings geht sie bei symmetrischen (nicht unbedingt symmetrisch gelagerten) Stäben wegen $\nu_n l_n = \nu_1 l_1$, $\nu_{n-1} l_{n-1} = \nu_2 l_2$ usw. auf die Hälfte zurück. Bei zu großem n wird man mehrere benachbarte Abschnitte einmal durch den größten und ein andermal durch den kleinsten Wert der vorkommenden Biegesteifigkeiten ersetzen und so mit Hilfe der exakten Lösungen für diesen auf wenige Teilstücke reduzierten Stab die wirkliche Knicklast in Schranken einschließen.

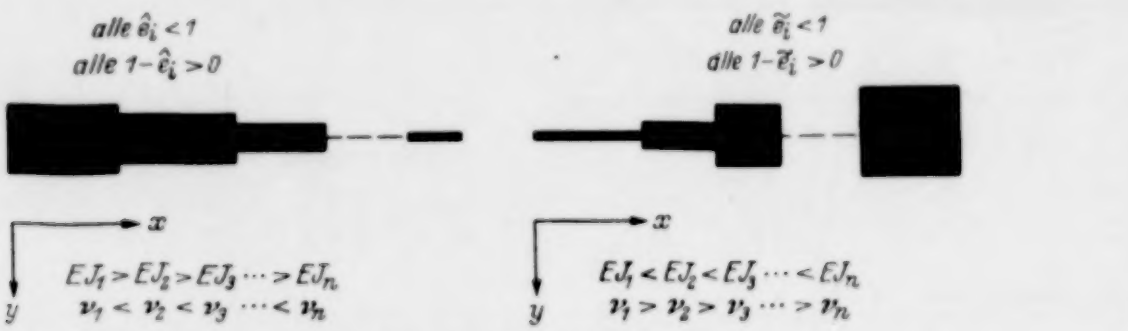


Abb. 3. Einseitig verjüngte Stäbe.

5. Untere Schranken für die kleinste Knicklast. Insbesondere betrachten wir jetzt solche Stäbe, die sich nach rechts (bzw. links) verjüngen (Abb. 3). Da dann offenbar alle Zahlen $1-\hat{e}_i$ (bzw. $1-\tilde{e}_i$) positiv ausfallen — die $1+\hat{e}_i$ und $1+\tilde{e}_i$ sind es ja ohnehin — werden sämtliche Vorfaktoren in den Funktionen $\hat{c}_i$, $\hat{s}_i$ (bzw. $\tilde{c}_i$, $\tilde{s}_i$) nach (19) ebenfalls positiv, und daraus folgt, daß die kleinste positive Nullstelle der Summenfunktion weiter rechts liegen muß als diejenige des Summanden mit dem maximalen Argument $\varrho = \nu_n l_n + \cdots \nu_2 l_2 + \nu_1 l_1$. Damit ergeben sich dann die in der letzten Spalte der Tabelle 1 angegebenen unteren Schranken für die gesuchte kleinste Knicklast P_k. Aus Symmetriegründen folgt noch, daß die Abschätzung in den Fällen a) und e) auch dann gilt, wenn der Stab nach rechts bzw. links verjüngt ist.

6. Stäbe mit starren Zwischenstücken. Falls einige Abschnitte des Stabes starr, ihre Biegesteifigkeiten also unendlich groß sind, werden die zugehörigen $\nu_i = 0$. Man schreibt dann in den Formeln (17) bzw. (19) wieder $\hat{e}_i = \nu_i/\nu_{+1}$, $\tilde{e}_i = \nu_{i+1}/\nu_i$ und führt mit allen Werten ν_i, die gleich

Null zu setzen sind, soweit sie im Nenner vorkommen, die Grenzübergänge

$$\lim_{\nu_i \to 0} \frac{\sin \nu_i l_i}{\nu_i} = l_i \,, \qquad \lim_{\nu_i \to 0} \frac{\operatorname{tg} \nu_i l_i}{\nu_i} = l_i \tag{21}$$

durch, was sich in den Formeln (17) besonders bequem gestaltet, während man in (19) erst die Additionstheoreme heranziehen muß. Die zu $\nu_i = 0$ gehörige Leitmatrix wird nach (5)

$$\mathfrak{L}_i = \begin{pmatrix} 1 & l_i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \nu_i = 0 \,, \tag{22}$$

und das heißt, daß der Stab in diesem Teilstück unverbogen bleibt.

7. Beispiele. a) Erstes Beispiel: Man berechne die Knicklast des Stabes der Abb. 4 mit $EJ_1 = 9EJ$, $EJ_2 = 4EJ$, $EJ_3 = EJ$, $l_1 = l/4$, $l_2 = l/4$, $l_3 = l/2$. Nach Tabelle 1 liegt der Knickfall b) vor; die Bedingung heißt somit $\hat{c}_3 = 0$. Mit der Abkürzung $\nu = \sqrt{P/EJ}$ stellen wir zunächst sämtliche benötigten Größen zusammen:

$$\nu_1 = \frac{\nu}{3} \,, \quad \nu_1 l_1 = \frac{\nu l}{12} \,, \quad \hat{e}_1 = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{2}{3} \,, \quad 1 + \hat{e}_1 = \frac{5}{3} \,, \quad 1 - \hat{e}_1 = \frac{1}{3} \,,$$

$$\nu_2 = \frac{\nu}{2} \,, \quad \nu_2 l_2 = \frac{\nu l}{8} \,, \quad \hat{e}_2 = \frac{\nu_2}{\nu_3} = \frac{1}{2} \,, \quad 1 + \hat{e}_2 = \frac{3}{2} \,, \quad 1 - \hat{e}_2 = \frac{1}{2} \,.$$

$$\nu_3 = \nu \,, \quad \nu_3 l_3 = \frac{\nu l}{2} \,.$$

Da sich der Stab nach rechts verjüngt, ist nach Spalte 4 der Tabelle 1 mit $\varrho = \nu_1 l_1 + \nu_2 l_2 + \nu_3 l_3 = 17\,\nu l/24$

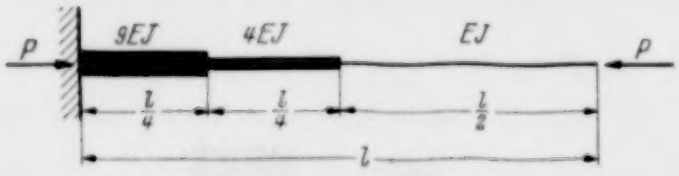


Abb. 4. Knickstab eingespannt-frei, drei Teilstücke.

$$P_k > P\left(\frac{\pi}{2\varrho}\right)^2 = P\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{24}{17\,\nu l}\right)^2 = P\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{24}{17}\right)^2 \frac{EJ}{P l^2} = 4{,}9\,\frac{EJ}{l^2} \,.$$

Der genaue Wert folgt aus (20), dritte Zeile:

$$4\,\hat{c}_3 = 0 = \frac{3}{2}\left(\frac{5}{3}\cos\frac{17\,\nu l}{24} + \frac{1}{3}\cos\frac{13\,\nu l}{24}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\cos\frac{7\,\nu l}{24} + \frac{1}{3}\cos\frac{11\,\nu l}{24}\right)$$

oder einfach mit $\nu l/24 = z$

$$24\,\hat{c}_3 = 0 = 15\cos 17\,z + 3\cos 13\,z + 5\cos 7\,z + \cos 11\,z \,.$$

Den Verlauf der vier Summanden und der Funktion $24\,\hat{c}_3$ zeigt Abb. 5; man findet als erste Nullstelle $z = \nu l/24 = 0{,}11$ und damit $P_k = 6{,}98\,EJ/l^2$.

Zweites Beispiel: Man berechne die Knicklast des Stabes der Abb. 6 mit $EJ_1 = \infty$, $EJ_2 = EJ$, $EJ_3 = \infty$, $l_1 = l_2 = 2\,l/5$, $l_3 = l/5$; Knickfall a), Bedingung $\tilde{s}_3/\nu_3 = 0$. Hier ist nun $\nu_1 = \nu_3 = 0$, also gibt die dritte Zeile von (17c) nach (21) und wegen $\cos 0 = 1$

$$\frac{\tilde{s}_3}{\nu_3 \cdot 1 \cdot \cos \nu_2 l_2 \cdot 1} = l_1 + \frac{t_2}{\nu_2} + l_3 - l_1 \nu_2 t_2 l_3 \,,$$

$$\frac{\tilde{s}_3}{\nu_3} = 0 = \cos \nu_2 l_2 \left[(l_1 + l_3) + \left(\frac{1}{\nu_2} - l_1 l_3 \nu_2\right) \operatorname{tg} \nu_2 l_2\right] .$$

Für die angegebenen Werte findet man hieraus mit $\nu_2 l_2 = z$

$$\operatorname{tg} z = \frac{l_2 (l_1 + l_3)}{l_1 l_3 z^2 - l_2^2}\, z = \frac{3z}{z^2 - 2} \equiv f(z)$$

und entnimmt der Abb. 7 die kleinste Wurzel der Gleichung $\operatorname{tg} z = f(z)$ als $z = \nu_2 l_2 = 1{,}51$. Also ist $(\nu_2 l_2)^2 = \left(\frac{2\,l\nu}{5}\right)^2 = \frac{4\,Pl^2}{25\,EJ} = 1{,}51^2 = 2{,}28$; somit $P_k = 2{,}28\left(\frac{25\,EJ}{4\,l^2}\right) = 14{,}25\,EJ/l^2$.

8. Knickstäbe mit elastischen und starren Zwischenstützen und sprunghaft veränderlicher Längskraft. Wir nehmen zunächst an, der Stab sei an beliebig vielen Zwischenstellen durch Federn und

Drehfedern elastisch gestützt; auch möge sich an jeder Feldgrenze die Längskraft sprunghaft ändern. Die Differentialgleichung (1) gilt dann immer noch, auch die Feld- und Leitmatrizen werden davon nicht berührt. Da jedoch in den Feldrändern nicht mehr alle vier Größen y, y', M und Q stetig ineinander übergehen, hat man gewisse von den Federkonstanten und Längskräften abhängige Übergangsmatrizen $\mathfrak{U}_i$ einzuführen, und die Produktmatrix $\mathfrak{P}_n$ lautet jetzt allgemeiner

$$\mathfrak{P}_n = \mathfrak{U}_{n+1}\,\mathfrak{L}_n\,\mathfrak{U}_n \cdots \mathfrak{U}_2\,\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{U}_1\,. \tag{23}$$

In dieser Matrix sind wiederum zwei Zeilen und zwei Spalten zu streichen; man braucht daher auch von vornherein nur je zwei Spalten gleicher Nummer der $2n+1$ Matrizen der rechten Seite

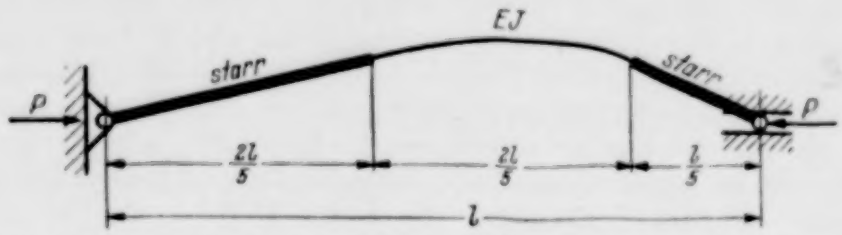


Abb. 6. Knickstab beiderseits gelenkig gelagert, drei Teilstücke, Außenabschnitte starr.

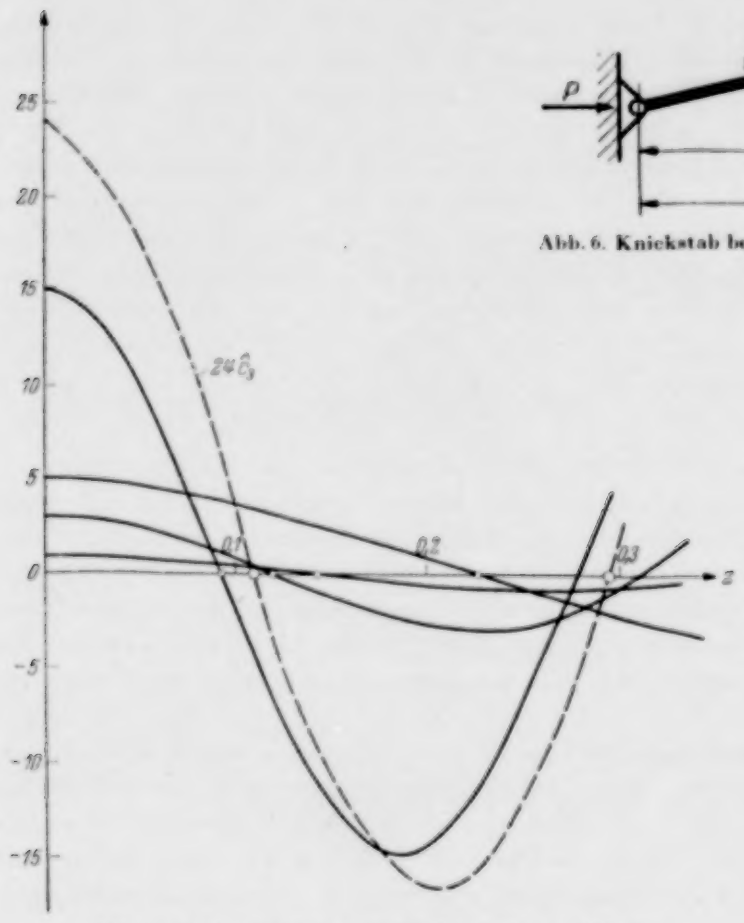


Abb. 5. Zeichnerische Lösung für den Stab von Abb. 4.

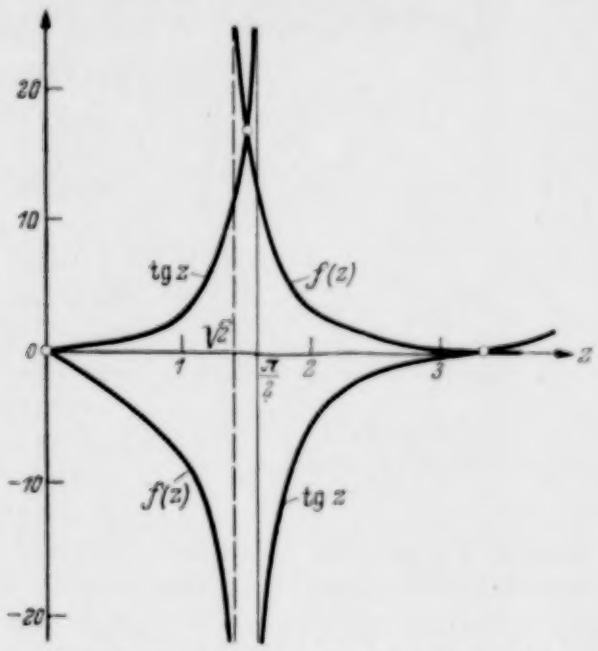


Abb. 7. Zeichnerische Lösung für den Stab von Abb. 6.

von (23) zu berechnen. Für $\mathfrak{U}_i = \mathfrak{E}$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ geht (23) wieder in (7), (8) über. Bei starren Zwischenstützen ist die Methode etwas abzuändern. Näheres darüber findet man bei *W. Schnell*[1] und in einer Arbeit des Verfassers[2].

Zwar lassen sich auch jetzt noch allgemeine Knickformeln angeben, doch werden diese schon bei drei Feldern so umfangreich, daß man in der Praxis besser anders vorgeht: ein fester Wert P wird in die Leit- und Übergangsmatrizen eingesetzt, nach (23) die Produktmatrix $\mathfrak{P}_n$ und aus dieser der Wert einer gewissen durch die Randbedingungen des rechten Endes festgelegten zweireihigen Unterdeterminante berechnet und über P aufgetragen. Durch Interpolation bestimmt man dann den Nulldurchgang, ein Verfahren, das für Schwingungen von Kurbelwellen in der Ingenieurmechanik unter dem Namen von *Holzer-Tolle* seit langem bekannt ist.

(Eingegangen am 14. Juli 1955.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Sigurd Falk*, Braunschweig, Celler Straße 93a.

[1] *W. Schnell*, Z. angew. Math. Mech. 35 (1955) Nr. 6/7, S. 269.
[2] *S. Falk*, Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft 7 (1955), S. 60.

Theorie der Hochdruckröhrenfeder

Von W. Wuest

1. Grundgleichungen. Hochdruckröhrenfedern nach Art des *Bourdon*manometers werden zum Messen von Drücken im Bereich von etwa 100 bis 10000 kg/cm² benutzt. Das Meßelement besteht dabei aus einem kreisförmig gekrümmten Rohr von ovaler Querschnittsform (Abb. 1), dessen eines Ende verschlossen ist, während das andere Ende fest mit der Druckzuführung verbunden ist. Bei Einleiten eines Druckes sucht sich der ovale Querschnitt der Kreisform anzunähern. Wegen der Krümmung der Feder werden dabei „Ringspannungen" hervorgerufen, welche den Krümmungshalbmesser zu vergrößern trachten.

Es ist bekannt, daß diese Ringspannungen bei dünnwandigen Federn die elastischen Deformationen des Querschnitts wesentlich beeinflussen. Man kann also die Formänderungen von Niederdruckfedern nicht berechnen, ohne von vornherein die Rückwirkung der Ringspannungen zu berücksichtigen. Diese Rückwirkung ist vernachlässigbar klein, wenn[1] der Röhrenfederkennwert

$$\lambda = \frac{a^2}{d R_0} < 1$$

ist, wobei a die mittlere große Halbachse des Ovalquerschnittes, d die Wandstärke und R_0 den Krümmungshalbmesser bedeutet.

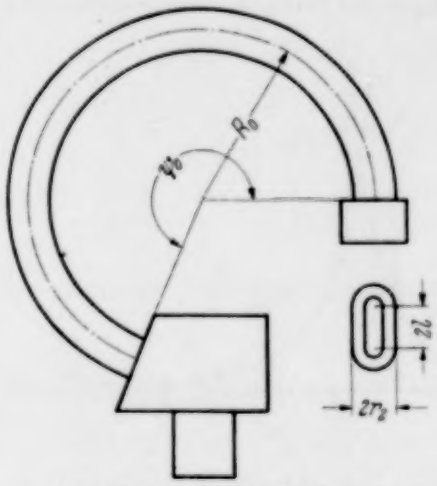


Abb. 1. Schematische Darstellung einer Röhrenfeder.

Diese Bedingung ist bei Hochdruckröhrenfedern stets erfüllt. Man hat also die Vereinfachung, daß zunächst die Formänderungen des Querschnitts genau so berechnet werden können, wie wenn die Rohrachse gerade wäre. Erst hinterher werden die Ringspannungen und die Krümmungsänderung der Feder ermittelt.

Den Spannungszustand in einem geraden Rohr können wir aber auf einen ebenen Formänderungszustand zurückführen. Denken wir uns eine „Scheibe" herausgeschnitten, so können sich die parallelen Ebenen wegen ihres Zusammenhanges mit dem übrigen Körper nicht „ausbeulen". Wenn wir die x-Achse mit der Rohrachse zusammenfallen lassen und eine Torsionsbeanspruchung des Rohres ausschließen, lauten die Gleichgewichtsbedingungen[2]

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \tag{1}$$

Diese Bedingungen lassen sich durch Einführung der *Airy*schen Spannungsfunktion F befriedigen:

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y \, \partial z}. \tag{2}$$

Die Spannungsfunktion muß dabei der folgenden biharmonischen Differentialgleichung genügen:

$$\Delta' \Delta' F = \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \, \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) F = 0. \tag{3}$$

Für die axialen Spannungen erhält man

$$\sigma_x = \mu (\sigma_y + \sigma_z) + \alpha y + \beta z + \gamma, \tag{4}$$

wobei α, β und γ Konstante sind und $\mu \approx 0{,}3$ die Querkontraktionszahl bezeichnet. Die drei letzten Glieder entsprechen einem Spannungszustand, der aus Zug und Biegung zusammengesetzt ist. Wir setzen zunächst $\alpha = \beta = \gamma = 0$ und überlagern erst am Schluß diese Zusatzspannungen.

---

[1] Eine Begründung dieser Bedingung wird an anderer Stelle gegeben werden; vgl. auch *W. Wuest*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 116.

[2] Vgl. *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, 2. Aufl., Bd. 1, S. 104. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1953.

Hinzu treten noch folgende Bestimmungsgleichungen für die Verschiebungen:

$$E\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y E = \sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x), \tag{5a}$$

$$E\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z E = \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y), \tag{5b}$$

$$G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \tau_{yz}. \tag{5c}$$

Dabei ist der Schubmodul $G = E/2(1+\mu)$.

2. Der Spannungszustand im geraden Rohr von flachbogenförmigem Querschnitt. Bei der Herstellung von Röhrenfedern geht man von einem dickwandigen Rohr von kreisförmigem Querschnitt aus, dem man durch Flachschlagen oder Flachpressen in heißem Zustand die gewünschte ovale Querschnittsform gibt. Wir bezeichnen diese Form als Flachbogen-Querschnitt und idealisieren sie entsprechend Abb. 2. Wir zerlegen den

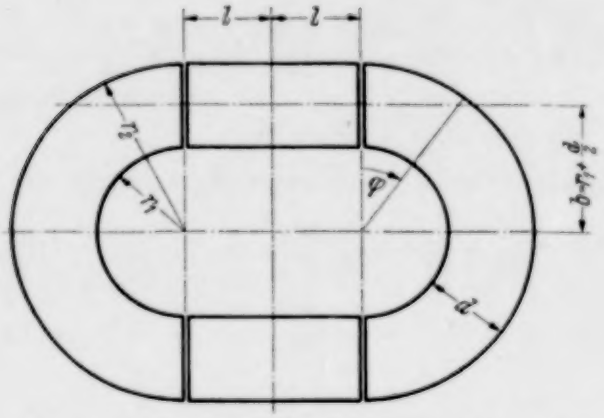


Abb. 2. Zerlegung des Flachbogenquerschnittes in die rechteckigen Mittelteile und die Randbögen.

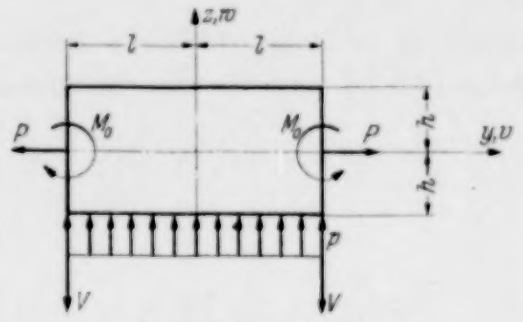


Abb. 3. Kräfte und Momente am Rechteckteil.

Querschnitt, wie in Abb. 2 angedeutet, in zwei halbe Ringflächen und zwei Rechtecke. An den „Nahtstellen" müssen die Spannungen und Deformationen stetig bleiben. Durch Ansatz von Reihenentwicklungen kann man diese Forderung sicher erfüllen. Wir wollen aber einen anderen Weg gehen und suchen eine Näherungslösung dadurch zu gewinnen, daß wir für den Ringbereich und den Rechteckbereich einfache Ansätze für die Spannungsfunktion wählen, welche die Randbedingungen am Außen- und Innenrand erfüllen, während an der Nahtstelle nur die Integralwerte der Spannungen, Momente und Deformationen (über die Wanddicke integriert) stetig sind. Wir machen uns in diesem Fall das Prinzip von *De Saint Venant* zunutze, nach dem Störungen und Spannungsverteilung in einer gewissen Entfernung von der Lastangriffsstelle abklingen. Wenn man das Ergebnis anderer bekannter Fälle überträgt, dürften die Störungen etwa in einer Entfernung von der Größenordnung der Wanddicke abklingen. Man wird diese Näherung also unter Umständen für sehr dickwandige Federn nicht mehr anwenden dürfen. (Vgl. hierzu Abschnitt 2e.)

a) Rechteckteil. Im Rechteckteil (Abb. 3) wählen wir für die Spannungsfunktion das Polynom

$$F = a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5 + y^2(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3). \tag{6}$$

Durch Einsetzen dieses Ansatzes in (3) folgt dann

$$b_2 = -3a_4, \qquad b_3 = -5a_5, \tag{6a}$$

und man erhält für die Spannungskomponenten

$$\sigma_y = 2a_2 + 6a_3 z + 12a_4(z^2 - 0{,}5\,y^2) + 20a_5(z^3 - 1{,}5\,y^2 z), \tag{7a}$$

$$\sigma_z = 2b_0 + 2b_1 z - 6a_4 z^2 - 10a_5 z^3, \tag{7b}$$

$$\tau_{yz} = -2b_1 y + 12a_4 yz + 30a_5 yz^2. \tag{7c}$$

Die Randbedingungen lauten

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für} & z = \dfrac{d}{2} = h: & \sigma_z = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \\ \text{für} & z = -\dfrac{d}{2} = -h: & \sigma_z = -p, \quad \tau_{yz} = 0. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Lehrbuch der theoretischen Physik

von

Walter Weizel

o. Professor der Physik an der Universität Bonn

In zwei Bänden

Soeben erschien: *November 1955*

Erster Band: **Physik der Vorgänge**

Bewegung · Elektrizität · Licht · Wärme

Zweite, verbesserte Auflage

Mit 283 Abbildungen. XVI, 804 Seiten Gr.-8°. 1955.

Ganzleinen DM 69,60

Näheres auf den folgenden Seiten

Zweiter Band: **Struktur der Materie**

Mit 194 Textabbildungen. XII, 768 Seiten Gr.-8°. 1950.

DM 66,—; Ganzleinen DM 69,90

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Lehrbuch der theoretischen Physik. Von **Walter Weizel**, o. Professor der Physik an der Universität Bonn. In 2 Bänden.

Erster Band: **Physik der Vorgänge.** Bewegung, Elektrizität, Licht, Wärme. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 283 Abbildungen. XVI, 804 Seiten Gr.-8°. 1955. Ganzleinen DM 69,60

Inhaltsverzeichnis.

Die Theorie als ordnendes Prinzip des Erkennens.

A. Mechanik der Massenpunkte und starren Körper.

I. **Die freie Bewegung des einzelnen Massenpunktes.** § 1. Das Modell des Massenpunktes. § 2. Bahn, Geschwindigkeit und Beschleunigung. § 3. Die NEWTONschen Grundgesetze der Mechanik. § 4. Impuls, Bewegungsgröße, Drehmoment, Drehimpuls. § 5. Arbeit. Kinetische Energie. § 6. Klassifikation der Kräfte. § 7. Konservative Kräfte. Das Potential. § 8. Der Energiesatz. § 9. Zentralkräfte. Flächensatz. § 10. Gravitationskräfte. Planetenbewegung. § 11. Quasielastische Kräfte. § 12. Kraftfelder ohne Potential. § 13. Reibungskräfte. Gedämpfte Schwingungen. § 14. Zeitabhängige Kräfte. Erzwungene Schwingungen. *§ 15. Stoßkräfte. § 16. Allgemeine mathematische Gesichtspunkte für die Behandlung der Bewegungsgleichungen. § 17. Anfangsbedingungen und Integrationskonstanten. *§ 18. Relativbewegung. Zentrifugalkraft. Corioliskräfte.

II. **Mechanik eines Systems von vielen Massenpunkten.** § 1. Die freie Bewegung vieler Massenpunkte. § 2. Beschränkungen der Bewegungsfreiheit. § 3. Die Zwangskräfte. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen. § 4. Das D'ALEMBERTsche Prinzip. Die LAGRANGEschen Gleichungen I. Art. § 5. Generalisierte Koordinaten. LAGRANGEsche Gleichungen II. Art. § 6. Kräfte, die sich aus einem Vektorpotential herleiten. § 7. Zyklische Koordinaten. § 8. Der Schwerpunktsatz. Impulssatz. § 9. Der Drehimpulssatz. § 10. Kinetische Energie eines Systems von Massenpunkten. Energiesatz. § 11. Das Zweikörperproblem. § 12. Das ebene mathematische Pendel. § 13. Das Raumpendel. § 14. Schwingungen um eine Gleichgewichtslage. *§ 15. Berechnung der Zwangskräfte in generalisierten Koordinaten.

III. **Die Bewegung des starren Körpers.** § 1. Das Modell des starren Körpers. § 2. Translation und Rotation eines starren Körpers. § 3. Impuls, Drehimpuls und kinetische Energie eines starren Körpers. § 4. Das Trägheitsmoment. § 5. Rotation um eine feste Achse. Physisches Pendel. *§ 6. Drehung um einen festen Punkt. EULERsche Kreiselgleichungen. § 7. Die EULERschen Winkel als generalisierte Koordinaten. § 8. Der symmetrische Kreisel.

IV. **Die Prinzipien der Dynamik.** § 1. Das D'ALEMBERTsche Prinzip. § 2. Die Prinzipien von JOURDAIN und GAUSS. § 3. Differential- und Integralprinzipien. § 4. Das HAMILTONsche Prinzip.

V. **Die HAMILTON-JACOBIsche Theorie.** § 1. Die kanonischen Gleichungen der Mechanik. § 2. Die HAMILTON-Funktion. § 3. Zyklische Koordinaten. Verwertung von Integralen. § 4. Das Energieintegral. *§ 5. Kanonische Transformationen. § 6. Die partielle HAMILTONsche Differentialgleichung. § 7. Die Methode der Separation. *§ 8. Die Wirkungsfunktion. *§ 9. Der Phasenraum. *§ 10. Übergang zur statistischen Mechanik.

*VI. **Periodische und bedingt periodische Bewegungen.** *§ 1. Periodische Bewegungen mit einem Freiheitsgrad. **§ 2. Winkelvariablen und Wirkungsvariablen. **§ 3. Mehrfach periodische Bewegungen. *§ 4. Doppelt periodische Schwingungen.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

VII. **Der Übergang zur Wellenmechanik.** § 1. Wirkungswellen und Wellengleichung der klassischen Mechanik. § 2. Analogien zur Optik. § 3. Wellenmechanik. § 4. Die Wellenfunktion. Randbedingungen.

B. Mechanik der Kontinua.

I. **Bewegungen und Spannungen in einem Kontinuum.** § 1. Drehung und Verzerrung (Deformation). Verzerrungstensor. § 2. Die Volumendilatation. § 3. Das Strömungsfeld. § 4. Der Spannungstensor. § 5. Symmetrie des Spannungstensors. § 6. Spannungshauptsachen. Hauptspannungen. § 7. Klassifikation der Kräfte. Die drei Aggregatzustände.

II. **Elastizitätstheorie.** § 1. Die Beziehung zwischen Spannung und Verzerrung. Die potentielle Energie der elastischen Deformation. Elastizitätsmodul und POISSONsche Querkontraktionszahl. HOOKEsches Gesetz. § 2. Die Differentialgleichungen für elastische Bewegungen. § 3. Randbedingungen für die Körperoberfläche. § 4. Das Gleichgewicht elastischer Körper. Elastostatik. § 5. Minimalprinzipien. § 6. Virtuelle Verrückungen. D'ALEMBERTsches Prinzip. § 7. Das Minimum der potentiellen Energie im Gleichgewicht. § 8. Das HAMILTONsche Prinzip.

III. **Einfache Anwendungen der Elastizitätstheorie.** § 1. Die Dehnung. § 2. Die Scherung. § 3. Die gleichmäßige Kompression. § 4. Die Torsion. § 5. Die gleichförmige Biegung. § 6. Biegung eines am freien Ende belasteten Balkens. § 7. Bewegungen elastischer Körper. § 8. Schwingungen trägheitsloser elastischer Körper. Dehnungsschwingungen. Torsionsschwingungen. Biegungsschwingungen.

IV. **Elastische Wellen und Eigenschwingungen.** § 1. Fortschreitende Wellen in elastischen Medien. § 2. Ebene elastische Wellen. § 3. Elastische Kugelwellen. § 4. Die Reflexion elastischer Wellen an den Grenzflächen zweier Medien. § 5. Stehende Wellen.

V. **Eigenschwingungen elastischer Körper.** § 1. Schwingungen gespannter Saiten. § 2. Stabschwingungen. Längsschwingungen. Torsionsschwingungen. *Querschwingungen, Biegeschwingungen. Kompliziertere Probleme. *§ 3. Die schwingende Membran. § 4. Schwingungen von Platten und Schalen. *§ 5. Anregung von Schwingungen, Anfangsbedingungen. Anregungen von Saitenschwingungen. Stabschwingungen. **Anregung von Membranschwingungen. *§ 6. Erzwungene Schwingungen. Erzwungene Seitenschwingungen. **Erzwungene Membranschwingungen.

VI. **Die Grundgleichungen der Hydrodynamik.** § 1. Das Strömungsfeld. Die Beschleunigung. Die Deformation eines Flüssigkeitselementes. Das Wirbelfeld. Die Volumendilatation. Kontinuitätsgleichung. § 2. Die Kräfte in der Flüssigkeit. Der hydrostatische Druck. Reibungskräfte. § 3. Die NAVIER-STOKESschen Bewegungsgleichungen. § 4. Randbedingungen.

VII. **Ideale Flüssigkeiten.** § 1. Die ruhende Flüssigkeit. Hydrostatik. Auftrieb. Archimedisches Prinzip. Schwimmen. § 2. Gleichförmige Rotation einer Flüssigkeit. § 3. Die BERNOULLIsche Energiegleichung. Potentialströmungen. *§ 4. Energiedichte und Energietransport durch die Strömung. § 5. Die Zirkulation. Erhaltungssatz von THOMSON. § 6. Die HELMHOLTZschen Wirbelsätze. § 7. Berechnung des Strömungsfeldes aus dem Wirbelfeld. § 8. Die Potentialströmung. Die ebene Potentialströmung. *§ 9. Die ebene Strömung um ein Hindernis. Strömung um einen Kreiszylinder. Staupunkte. **Beliebige Profile. *§ 10. Strömung um eine Kugel.

VIII. **Zähe Flüssigkeiten.** § 1. Ähnlichkeitsgesetze. REYNOLDSsche Zahl. § 2. Strömungen mit überwiegendem Reibungseinfluß. Die laminare Strömung durch zylindrische Röhren. Die Strömung zwischen bewegten Platten und Zylindern. § 3. Die Bewegung einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit. § 4. Die Grenzschicht an festen Wänden. Die Differentialgleichung der PRANDTLschen Grenzschicht. Die Ablösung der laminaren Grenzschicht. **§ 5. Wirbelablösung hinter einer Spitze und die Entstehung der Zirkulation um einen Tragflügel. § 6. Turbulenz. **§ 7. Störungstheorie der Turbulenz.

IX. **Kapillarität.** § 1. Kapillarkräfte. § 2. Grenzbedingungen an festen Wänden. *§ 3. Die Differentialgleichung der Flüssigkeitsoberfläche. Der Anstieg einer Flüssigkeit an ebenen Wänden. Flüssigkeitsspiegel in Röhren. § 4. Flüssigkeitslamellen, Seifenblasen.

X. **Zeitlich veränderliche Strömungen. Strömungen kompressibler Medien.** *§ 1. Wasserwellen. *§ 2. Der Schall in Gasen und Flüssigkeiten. Die kugelförmige Ausbreitung von Schallwellen. Ebene Wellen, periodische Wellen. *§ 3. Die Schallabstrahlung. § 4. Die Schallgeschwindigkeit. **§ 5. Die Schallenergie. § 6. Reflexion, Brechung und Beugung des Schalls. § 7. Grundgleichungen der Gasdynamik. § 8. Strömung durch eine Düse. § 9. Bewegung eines Körpers mit Überschallgeschwindigkeit. § 10. Linearisierte Strömung bei Unterschallgeschwindigkeit. **§ 11. Die linearisierte Überschallströmung. **§ 12. Nichtlineare Überschallströmung. Verdichtungsstoß.

C. Elektrodynamik.

I. **Elektrostatik.** § 1. Das COULOMBsche Gesetz. Einheiten der elektrischen Ladung. § 2. Das elektrische Feld. Die Feldstärke. § 3. Der elektrische Fluß. § 4. Das elektrische Potential. § 5. Systeme mehrerer Punktladungen. Der Dipol. § 6. Raumladungen und Flächenladungen. § 7. Berechnung des Feldes aus der Ladungsverteilung. Geladene Kugelfläche. Geladene Vollkugel. Der Kugelkondensator. Der Zylinderkondensator. Der Plattenkondensator. *§ 8. Das Feld einer beliebigen elektrischen Anordnung in großer Entfernung. § 9. Leiter im elektrostatischen Feld. § 10. Influenz. § 11. Äquipotentialflächen und Kraftlinien. § 12. Die elektrische Doppelschicht. Kontaktpotential. § 13. Die Dielektrizitätskonstante. § 14. Grenzflächen zweier Medien. § 15. Die dielektrische Polarisation. § 16. Dielektrische Kugel im homogenen Feld. § 17. Die Energie des elektrostatischen Feldes. § 18. Das elektrische Feld als Sitz der Energie. § 19. Die elektrostatischen Kräfte.

II. **Das stationäre elektrische Feld.** § 1. Stromstärke, Stromdichte. Das OHMsche Gesetz. § 2. Das Stromdichtefeld. § 3. Der Widerstand. § 4. Der Energieumsatz im stationären Feld. JOULEsches Gesetz. § 5. Integralgrößen und Feldgrößen.

III. **Das Magnetfeld des stationären Stromes.** § 1. Das Magnetfeld permanenter Magnete. § 2. Die Ausmessung eines magnetischen Feldes. GAUSSsche Methode. § 3. Das Magnetfeld einer stationären Stromverteilung. § 4. Das Vektorpotential des magnetischen Feldes. § 5. Das LAPLACEsche Gesetz. Drahtförmige Leiter. § 6. Das skalare Potential des magnetischen Feldes. *§ 7. Der Einfluß magnetischer Materialien auf das Feld. § 8. Magnetischer Fluß. Kraftfluß. Induktionskoeffizienten. § 9. Die magnetische Energie. § 10. Magnetische Hysterese. § 11. Magnetfeld eines gestreckten Drahtes. *§ 12. Die parallele Doppelleitung. § 13. Die ebene Stromschleife. § 14. Das Magnetfeld einer Spule. Solenoid. § 15. Die eisengeschlossene Spule. Drosselspule. § 16. Die Selbstinduktion einzelner Apparate. § 17. Das magnetische Moment eines Stromkreises. § 18. Die ponderomotorischen Kräfte des Magnetfeldes. § 19. Einfache Fälle ponderomotorischer Kräfte.

IV. **Das quasistationäre Feld.** § 1. Das Induktionsgesetz. § 2. Die MAXWELLschen Gleichungen des quasistationären Feldes. § 3. Die induzierte Spannung. § 4. Das OHMsche Gesetz für quasistationäre Ströme. § 5. Wechselstromkreis mit Induktivität und Kapazität. § 6. Resonanz. § 7. Messung von Strom und Spannung. § 8. Die Stromleistung. § 9. Komplexe Darstellung der Wechselströme. Wechselstromschaltungen. § 10. Das Superpositionsprinzip. § 11. Die Leistung in komplexer Schreibweise. § 12. Induktiv gekoppelte Stromkreise. Gekoppelte Schwingungskreise. Der Transformator. *§ 13. Stromverdrängung. Skineffekt.

V. **Vierpoltheorie der Schaltungen.** § 1. Das lineare Netz als Vierpol. § 2. Die Matrizendarstellung eines Vierpols. § 3. Messung der Matrixelemente eines Vierpols. § 4. Schaltungen aus mehreren Vierpolen. § 5. Matrizen einfacher Vierpole. Ersatzschaltschemen. *§ 6. Kettenwiderstände. Kettenübertragungsmaße. *§ 7. Vierpolketten. *§ 8. Symmetrische Vierpole. *§ 9. Der Vierpol als Überträger. *§ 10. Sperrbereich und Durchlaßbereich. **§ 11. Leitungen.

VI. **Das schnellveränderliche elektromagnetische Feld.** § 1. Der Verschiebungsstrom. § 2. Die MAXWELLschen Gleichungen. § 3. Energiedichte und Energiestrom. *§ 4. Die ponderomotorischen Kräfte des elektromagnetischen Feldes. § 5. Die Wellengleichung. § 6. Ebene, elektrische Wellen in Isolatoren. § 7. Das Magnetfeld der ebenen Welle. § 8. Energiedichte und Energiestrom einer ebenen Welle. § 9. Periodische Wellen. Ebene Sinuswellen. Elliptisch und zirkular polarisierte Wellen. *§ 10. Komplexe Darstellung ebener, periodischer Wellen. § 11. Modulation und Superposition ebener Wellen. Schwebungen. *§ 12. FOURIER-Zerlegung einer Welle. Spektrum. *§ 13. Ebene Wellen in leitenden Medien.

VII. **Die Entstehung elektrischer Wellen.** § 1. Die elektrodynamischen Potentiale. § 2. Berechnung der Potentiale einer beliebigen elektromagnetischen Anordnung. Retardierte Potentiale. *§ 3. Die Wellenausstrahlung eines schwingenden Dipols. § 4. Abstrahlung von Antennen. Strahlungswiderstand. Lichtemission. § 5. Magnetische Dipolstrahlung. **§ 6. Die Ausstrahlung einer beliebigen elektromagnetischen Anordnung. **§ 7. Quadrupolstrahlung. § 8. Das Strahlungsfeld einer beschleunigten Punktladung.

D. Optik.

I. **Fortpflanzung, Reflexion und Brechung des Lichtes.** § 1. Das SNELLIUSsche Brechungsgesetz. § 2. Intensität und Polarisation des reflektierten und gebrochenen Lichtes. FRESNELsche Formeln. § 3. Das BREWSTERsche Gesetz. *§ 4. Totalreflexion. *§ 5. Phasenänderung bei der Reflexion. **§ 6. Reflexion an Metallen und absorbierenden Medien. § 7. Wellen und Strahlen. Übergang zur geometrischen Optik.

II. **Geometrische Optik.** § 1. Das FERMATsche Prinzip. § 2. Die optische Abbildung. § 3. Die kollineare Abbildung. GAUSSsche Abbildung. § 4. Die charakteristische Funktion eines optischen Systems. Das Winkeleikonal. Das Winkeleikonal zentrierter optischer Systeme. Die Brechung an einer einzelnen Rotationsfläche. § 5. Abbildung durch eine Linse. § 6. Die Abbildungsfehler optischer Systeme. *§ 7. Eintrittspupille, Austrittspupille. SEIDELsches Eikonal. *§ 8. Die Berechnung des SEIDELschen Eikonals. *§ 9. Die fünf Fehler 3. Ordnung. Sphärische Aberration. Die Koma. Verzeichnung. Astigmatismus, Bildfeldwölbung. *§ 10. Die ABBEsche Sinusbedingung. § 11. Die Abbildungsfehler einer dünnen Einzellinse ohne Blende.

III. **Interferenz.** § 1. Kohärenz. § 2 Interferenz an einer planparallelen Platte. § 3. AIRYsche Formeln. PEROT-FABRY-Interferometer. LUMMER-GEHRCKE-Platte. § 4. Kurven gleicher Neigung und gleicher Dicke. § 5. Interferenz gekreuzter Bündel. FRESNELscher Spiegelversuch.

IV. **Beugung.** § 1. KIRCHHOFFsche Theorie der Beugung. § 2. Beugung an einer beliebigen Öffnung. Einteilung der Beugungserscheinungen. § 3. Die FRAUNHOFERsche Beugung an Rechteck, Spalt und Kreis. § 4. Beugung am Gitter. § 5. Flächengitter, Kreuzgitter. § 6. FRESNELsche Beugungserscheinungen. § 7. Beugungstheorie der Abbildung. Auflösungsvermögen einer Linse. § 8. Das Auflösungsvermögen des Prismas.

V. **Kristalloptik.** § 1. Feldgleichungen, Energiedichte, Energiestrom. § 2. Ebene Lichtwellen im Kristall. § 3. Indexellipsoid, FRESNELsches Strahlenellipsoid, optische Achsen. § 4. Normalenfläche und Strahlenfläche. § 5. Optische Klassifikation der Kristalle. Einachsige Kristalle. § 6. Doppelbrechung an der Oberfläche anisotroper Körper. § 7. Interferenzerscheinungen an Kristallplatten im polarisierten Licht.

E. Elektrodynamik bewegter Körper. Relativitätstheorie.

I. **Die Theorie des ruhenden elektromagnetischen Äthers.** § 1. Der Konvektionsstrom. § 2. Das Induktionsgesetz. § 3. Der Lichtäther als Träger des elektromagnetischen Feldes. Konsequenzen der Äthertheorie. Dopplereffekt bei bewegtem Beobachter. Schatten eines bewegten Schirms. Relative Strahlen, Reflexion an bewegten Spiegeln. Brechung an bewegten Körpern. Aberration des Lichtes. Dopplereffekt bei bewegter Lichtquelle. FRESNELscher Mitführungskoeffizient. Versuch von FIZEAU. Versuch von SAGNAC. Der Versuch von TROUTON und NOBLE. Der Versuch von MICHELSON. Massenveränderlichkeit des Elektrons. § 4. Widerlegung der Theorie des ruhenden Äthers und Versuche zu einer Theorie der Äthermitführung.

II. **Die LORENTZ-Transformation.** § 1. Das Prinzip der konstanten Lichtgeschwindigkeit und die Ableitung der LORENTZ-Transformation. § 2. EINSTEINs Additionstheorem für Geschwindigkeiten. § 3. Die Relativität der Zeitintervalle und Raumstrecken. LORENTZ-Kontraktion. § 4. Reihenfolge von Ereignissen. Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft. § 5. Vierdimensionale Zusammenfassung von Raum und Zeit. § 6. Vierergeschwindigkeit und Eigenzeit. § 7. Transformation von Volumen und räumlicher Dichte.

III. **LORENTZinvariante Elektrodynamik.** § 1. Vierdimensionale Formulierung der elektrodynamischen Grundgleichung. § 2. Gruppeneigenschaft der LORENTZ-Transformation. § 3. Prüfung der LORENTZ-Transformation am Beobachtungsmaterial. Dopplereffekt und Aberration des Lichtes. Brechung und Reflexion an bewegten Spiegeln und Oberflächen. Der Versuch von FIZEAU. FRESNELscher Mitführungskoeffizient. Die Versuche von SAGNAC und MICHELSON und GALE. Die Versuche von MICHELSON und TROUTON-NOBLE vom Standpunkt der LORENTZ-Transformation. § 4. Kritik der naiven Raum- und Zeitvorstellung.

IV. **Spezielle Relativitätstheorie.** § 1. Das NEWTONsche Grundgesetz in vierdimensionaler Erweiterung. § 2. Der Energiesatz. § 3. Bewegungsgleichungen in generalisierten Koordinaten. *§ 4. Mehrkörperproblem. *§ 5. Mechanik der Kontinua.

V. **Das Problem der allgemeinen Relativitätstheorie.** *§ 1. Trägheit, MACHsches Prinzip. *§ 2. Die Gravitation. *§ 3. Äquivalenzprinzip. § 4. Kräftefreie Bewegung als geodätische Linie im Weltkontinuum. § 5. Das Gravitationsfeld einer Einzelmasse im leeren Raum. § 6. Kosmologische Konstante. Feldgleichungen. SITTERsche sphärische Welt.

F. Thermodynamik.

I. **Zustandsgrößen und Zustandsgleichung.** § 1. Grundbegriffe. § 2. Die Zustandsgleichung. § 3. Das Modell des idealen Gases. § 4. Die VAN DER WAALSsche Zustandsgleichung.

II. **Die Hauptsätze der Thermodynamik.** § 1. Die Temperatur. § 2. Der Kreisprozeß. § 3. Der erste Hauptsatz. § 4. Der CARNOTsche Kreisprozeß am idealen Gas. § 5. Der zweite Hauptsatz. § 6. Reversible und irreversible Prozesse. § 7. Die thermodynamische Definition der Temperatur. § 8. Die Entropie.

III. **Die thermodynamischen Funktionen und die thermodynamischen Differentialgleichungen.** § 1. Wahre und gehemmte Gleichgewichte. § 2. Apparative Hemmungen. Semipermeable Wände. § 3. Allgemeine Zustandsvariablen. Reaktionslaufzahlen. § 4. Die freie Energie. § 5. Das GIBBSsche thermodynamische Potential. § 6. Die Entropie und innere Energie als unabhängige Variable. § 7. Thermodynamik offener Systeme. § 8. Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen.

IV. **Einfache Anwendungen.** § 1. Ideale Gase von einheitlicher Zusammensetzung. § 2. Gasgemische. § 3. Das VAN DER WAALSsche Gas. § 4. Strömung durch eine Drossel. JOULE-THOMSON-Effekt. § 5. Phasen. GIBBSsche Phasenregel. § 6. Chemische Prozesse. § 7. Phasenänderung, Verdampfung. § 8. Die Elektrolyse.

V. **Die absoluten Zahlwerte der thermodynamischen Funktionen. NERNSTsches Theorem.** § 1. Die innere Energie. § 2. Absoluter Wert der Entropie. § 3. Verhalten der Stoffe bei tiefen Temperaturen. § 4. Die Unerreichbarkeit des absoluten Nullpunktes. § 5. Integration der HELMHOLTZschen Gleichung.

VI. **Grenzgebiete der Thermodynamik.** § 1. Chemisches Gleichgewicht in Gasen. § 2. Lösungen. § 3. Verdünnte Lösungen. § 4. Dampfdruckniederung, Siedepunkterhöhung. § 5. NERNSTscher Verteilungssatz. § 6. Osmotischer Druck. § 7. Elektrolytische Lösungen. § 8. Dampfdruckerhöhung durch Fremddruck und Oberflächenspannnung. § 9. Chemisches Potential von Ladungsträgern im elektrischen Feld.

VII. **Wärmestrahlung.** § 1. Strahlungsfeld. § 2. Reguläre und diffuse Reflexion. Weiße Oberflächen und schwarze Körper. § 3. Hohlraumstrahlung. § 4. Absorptionsvermögen, Emissionsvermögen. KIRCHHOFFsches Gesetz. § 5. Das PLANCKsche Strahlungsgesetz. § 6. WIENsches Verschiebungsgesetz. STEFAN-BOLTZMANNsches Gesetz. Optischer Wirkungsgrad. Leuchtdichte.

VIII. **Thermodynamik irreversibler Prozesse.** § 1. Irreversible Prozesse an Phasengrenzflächen und Trennwänden. § 2. Dissipationsfunktion. § 3. Die ONSAGERschen Reziprozitätsbeziehungen. § 4. Einfache Anwendungen. Elektrokinetische Effekte. Thermomechanische Effekte. § 5. Irreversible Prozesse in kontinuierlichen Medien. *§ 6. Die Bilanzgleichungen irreversibler Prozesse. *§ 7. Dissipationsfunktion, Ströme und Kräfte. ONSAGERsche Relationen. *§ 8. Anwendungen. 1. Isotherme Diffusion. 2. Reine Wärmeleitung im homogenen Medium. 3. Der stationäre Zustand. *§ 9. Thermoelektrizität.

IX. **Die Wärmeleitung.** § 1. Die Differentialgleichung der Wärmeleitung. § 2. Stationäre Vorgänge ohne Wärmeerzeugung. § 3. Stationäre Wärmeströmung mit Wärmeerzeugung. *§ 4. Nichtstationäre Vorgänge.

Namen- und Sachverzeichnis.

* *Diese Abschnitte sind schwieriger und stellen größere mathematische Anforderungen.*

** *In diesen Abschnitten ist der Gang der Überlegungen nur skizziert, Zwischenrechnungen sind eingespart.*

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Schneller als erwartet war die erste Auflage des ersten Bandes vergriffen. Die freundliche Aufnahme, die das Buch gefunden hat, hat den Verfasser in der Absicht bestärkt, die Gesamtanlage nicht wesentlich zu verändern. Er hat jedoch die Gelegenheit wahrgenommen, einige Teilgebiete etwas zu verstärken, welche sich in der Zwischenzeit weiter entwickelt haben oder durch Anwendungen stärkeres Interesse gewonnen haben. Es wurden deshalb einige Proben der Gasdynamik aufgenommen und die Thermodynamik irreversibler Prozesse berücksichtigt. Dem mehrfach geäußerten Wunsch, auch dem ersten Band ein Register beizugeben, ist in der zweiten Auflage Rechnung getragen.

Aus den Besprechungen der ersten Auflage:

. . . Das Werk ist gedacht als Lehrbuch für mittlere und höhere Semester. Dementsprechend ist von mathematischen Hilfsmitteln ein sehr maßvoller Gebrauch gemacht; schwierigere Einzelteile sind besonders gekennzeichnet. Das Verständnis der Entwicklungen und der Gebrauch als Nachschlagewerk wird außerordentlich erleichtert durch die zusammenfassenden Inhaltsangaben und Bezeichnungstafeln, die fast jedem einzelnen Paragraphen vorangestellt sind, ein nachahmungswertes Beispiel! Es versteht sich, daß bei einem einbändigen Lehrbuch der ganzen phänomenologischen Theorie die Auswahl beschränkt, die Darstellungen teils knapp gehalten und auf das Wesentliche konzentriert werden mußten. Das ist aber so gut geschehen, daß trotzdem der Eindruck entstanden ist, das Werk greife in jeder Beziehung ins Volle, angefangen von der Vielseitigkeit des Stoffes, der Fülle der Beziehungen zur Praxis in Beispielen und Formulierungen bis hin zu den erwähnten Nachschlagehilfen und den gut durchdachten Bezeichnungen . . . ; besonders hervorzuheben sind zahlreiche Betrachtungen grundsätzlicher Art über das Wesen einer physikalischen Theorie, die Bedeutung von Modellen, die jeweils eingenommenen Standpunkte und benutzten Schlußweisen, die dafür sorgen, daß nirgends ein nur oberflächliches Wissen angebaut wird . . .

„Zeitschrift für angewandte Physik"

. . The book has a high standard. The presentation is clear and thorough and it follows nearly always the conventional methods of treatment . . . The book should be very useful to the advanced student.

"The Proceedings of the Physical Society"

Zweiter Band: **Struktur der Materie.** Mit 194 Textabbildungen. XII, 768 Seiten Gr.-8°. 1950. DM 66,—; Ganzleinen DM 69,90

Aus den Besprechungen:

Mit dem soeben erschienenen zweiten Band liegt das WEIZELsche Lehrbuch der theoretischen Physik jetzt als geschlossene Einheit vor. Fortlaufende Kapitelteilung und Paginierung deuten schon äußerlich an, wie sehr der Verfasser erstrebt hat, das Ganze aus einem Guß zu schaffen. Im Gesamtumfang von 1540 Seiten und in der Ausgedehntheit und Mannigfaltigkeit der behandelten Stoffgebiete ist es ein bedeutsames Werk, das der heranwachsenden Physiker-Generation zweifellos ein guter und begehrter Führer sein wird. Auch für die Kollegen vom Fach bedeutet es ein in vieler Beziehung wertvolles Nachschlagebuch . . . Alles in allem stellt das WEIZELsche Lehrbuch ein im jetzigen Augenblick sehr wertvolles und höchst eigenartiges Werk dar, das vermutlich auch außerhalb der deutschen Sprachgrenzen Verbreitung finden wird.

„Zeitschrift für angewandte Physik"

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

11. 55. 550.

Die vier Bedingungen ergeben

$$\left.\begin{aligned} a_4 &= 0\,, & b_0 &= -\frac{p}{4}\,, \\ a_5 &= \frac{p}{40\,h^3}\,, & b_1 &= \frac{3}{8}\,\frac{p}{h}\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Nun ist aber die gesamte Längskraft offenbar gleich der von den Halbkreisenden ausgeübten Kraft, also

$$\int_{-h}^{h} \sigma_y\, dz = 4\,h\,a_2 = p\,r_1\,. \tag{10}$$

Es bleibt somit nur die Konstante a_3 statisch unbestimmt. Wir können sie noch durch das Moment M_0 ausdrücken, das an der Nahtstelle übertragen wird:

$$\left(\int_{-h}^{h} \sigma_y\, z\, dz\right)_{y=l} = -M_0 = 4\,a_3\,h^3 + \left[\frac{h^2}{5} - \frac{l^2}{2}\right] p\,, \quad 6\,a_3 = -\frac{3}{2}\,\frac{M_0}{h^3} - \left(\frac{3}{10} - \frac{3}{4}\,\frac{l^2}{h^2}\right)\frac{p}{h}\,. \tag{11}$$

Das Moment M_0 ist dabei statisch unbestimmt.

Insgesamt lauten jetzt die drei Spannungskomponenten

$$\sigma_y = \left[\frac{r_1}{2\,h} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{h}\right)^3 + \frac{3}{4}\,\frac{l^2 - y^2/3}{h^2}\,\frac{z}{h} - \frac{3}{10}\,\frac{z}{h}\right] p - \frac{3}{2}\,\frac{M_0}{h^3}\,z\,, \tag{12a}$$

$$\sigma_z = \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\,\frac{z}{h} - \frac{1}{4}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right] p\,, \tag{12b}$$

$$\tau_{yz} = -\left[\frac{3}{4}\,\frac{y}{h}\left(1 - \left(\frac{z}{h}\right)^2\right)\right] p\,. \tag{12c}$$

Für die Verschiebung v erhalten wir aus den Gleichungen (5a), (4) und (12) schließlich durch Integration

$$\left.\begin{aligned} E\,v = (1-\mu^2)\Big\{&\left[\frac{r_1}{2\,h}\,y + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{h}\right)^3 y + \frac{3}{4}\,\frac{l^2 - y^2/3}{h^2}\,\frac{z\,y}{h} - \frac{3}{10}\,\frac{z}{h}\,y\right] p - \frac{3}{2}\,\frac{M_0}{h^3}\,z\,y\Big\} \\ &- \mu\,(1+\mu)\left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\,\frac{z}{h} - \frac{1}{4}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right] p\,y + F_1(z)\,. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Die bei der Integration auftretende willkürliche Funktion $F_1(z)$ muß aber verschwinden, da aus Symmetriegründen $v = 0$ für $y = 0$ sein muß. In entsprechender Weise findet man aus (5b), (4) und (12) für die Verschiebungskomponente w durch Integration

$$\left.\begin{aligned} E\,w = (1-\mu^2)&\left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\,\frac{z}{h} - \frac{1}{16}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right] p\,z \\ -\mu\,(1+\mu)\Big\{&\left[\frac{r_1}{2\,h} + \frac{1}{8}\left(\frac{z}{h}\right)^3 + \frac{3}{8}\,\frac{l^2 - y^2}{h^2}\,\frac{z}{h} - \frac{3}{20}\,\frac{z}{h}\right] p\,z - \frac{3}{4}\,\frac{M_0\,z^2}{h^3}\Big\} + F_2(y)\,. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Die zunächst willkürliche Funktion $F_2(y)$ bestimmt man aus (5c) zu:

$$F_2(y) = -\left[0{,}692\,\frac{y^2}{h} + \frac{3}{8}\,(1-\mu^2)\,\frac{l^2 - y^2/6}{h^3}\,y^2\right] p + \frac{3}{4}\,(1-\mu^2)\,\frac{M_0}{h^3}\,y^2 + c_0\,p\,, \tag{14a}$$

wobei c_0 eine später zu bestimmende Integrationskonstante ist.

b) Gekrümmter Abschnitt. Es empfiehlt sich hier, Polarkoordinaten zu wählen (Abb. 4). Die Differentialgleichung (3) der Spannungsfunktion schreibt sich dann

$$\Delta'\Delta' F \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)^2 F = 0\,, \tag{15}$$

und die Spannungskomponenten lauten

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial F}{\partial r}\,, \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\,, \quad \tau_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right), \\ \sigma_z = \mu\,(\sigma_r + \sigma_\varphi)\,. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Für die Dehnungen gelten die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} E\varepsilon_r &= \sigma_r - \mu(\sigma_\varphi + \sigma_x) = E\frac{\partial \Delta r}{\partial r}, \\ E\varepsilon_\varphi &= \sigma_\varphi - \mu(\sigma_x + \sigma_r) = E\left(\frac{\Delta r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial \varphi}\right), \\ G\psi_{r\varphi} = \tau_{r\varphi} &= G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Delta r}{\partial \varphi} + r\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial r}\right). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Wir haben dabei die Verschiebungen eines Punktes (r, φ) mit Δr, $\Delta\varphi$ bezeichnet. Es ist zweckmäßig, von der allgemeineren Spannungsfunktion zunächst den achsensymmetrischen Belastungsfall abzutrennen. Die Spannungsfunktion F_1 für diesen Sonderfall ist dabei als Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta'\Delta' F_1 \equiv \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2 F_1 = 0 \tag{15a}$$

gegeben durch

$$F_1 = c_0 + c_1 \ln r + c_2 r^2 + c_3 r^2 \ln r. \tag{18}$$

Die Spannungskomponenten werden dann

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{r1} &= \frac{1}{r}\frac{dF_1}{dr} = 2c_2 + c_3(1 + 2\ln r) + \frac{c_1}{r^2}, \\ \sigma_{\varphi 1} &= \frac{d^2F_1}{dr^2} = -\frac{c_1}{r^2} + 2c_2 + c_3(3 + 2\ln r), \\ \tau_{r\varphi 1} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

und die Konstanten c_1, c_2, c_3 bestimmen sich daraus, daß

$$\text{für } r = r_2: \quad \sigma_{r1} = 0,$$

$$\text{für } r = r_1: \quad \sigma_{r1} = -p,$$

und

$$\int_{r_1}^{r_2} \sigma_{\varphi 1}\, r\, dr = -M_0 + p\frac{r_1}{2}(r_1 + r_2)$$

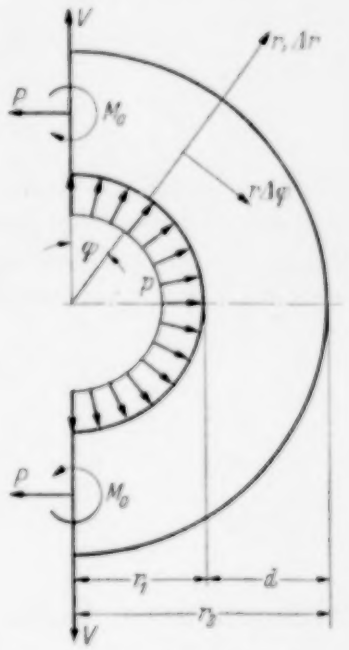


Bild 4. Kräfte und Momente am Randbogen.

sein muß. Hierbei ist M_0 das an den beiden Enden übertragene Moment (Abb. 4). Die drei Bedingungen liefern

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{N}\left[2r_1^2 r_2^2 \ln\frac{r_2}{r_1}(r_1 r_2 p - 2M_0) - r_1^2 r_2^2 (r_2^2 - r_1^2) p\right], \\ c_2 &= \frac{1}{N}\left[-\frac{1}{2}\left[r_2^2 - r_1^2 + 2(r_2^2 \ln r_2 - r_1^2 \ln r_1)\right](p r_1 r_2 - 2M_0)\right. \\ &\quad \left. + (1 + 2\ln r_2) r_1^2 r_2^2 \ln\frac{r_2}{r_1} p + \frac{r_1^2}{2}(r_2^2 - r_1^2) p\right], \\ c_3 &= \frac{1}{N}\left[(r_2^2 - r_1^2)(p r_1 r_2 - 2M_0) - 2r_1^2 r_2^2 \ln\frac{r_2}{r_1} p\right], \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$N = (r_2^2 - r_1^2)^2 - 4r_1^2 r_2^2 \ln^2\frac{r_2}{r_1}. \tag{20a}$$

Für die Dehnung bzw. die Verschiebungen erhält man durch Integration der Gleichung (17)

$$\left.\begin{aligned} E\Delta r_1 &= (1 + \mu)\left[-\frac{c_1}{r} + (1 - 2\mu)\, 2c_2 r + c_3(2(1 - 2\mu) r \ln r - r)\right], \\ E\Delta\varphi_1 &= 4(1 - \mu^2) c_3 (\varphi - \varphi_0). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Wegen $\Delta\varphi_1 = 0$ für $\varphi = \pi/2$ muß $\varphi_0 = \pi/2$ sein.

Nun ist zwar $\int_{r_1}^{r_2} \sigma_{\varphi 1}\, dr = p r_1$, und die an der Nahtstelle ($\varphi = 0$) übertragene Längskraft wird vom achsensymmetrischen Ansatz erfaßt. Wegen des durchgängigen Verschwindens der Schubspannung fehlt aber in dem Ansatz der Einfluß der Querkraft V (Abb. 4). Wir müssen also noch einen An-

teil hinzufügen, der die übertragene Querkraft erfaßt. Ein solcher Ansatz ist gegeben durch[1]

$$F_2 = f_2(r)\sin\varphi\,, \tag{22}$$

wobei man durch Einsetzen in (15) für f_2 die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{1}{r^2}\right)^2 f_2 = 0 \tag{15b}$$

erhält mit der Lösung

$$f_2 = c_4 r^3 + c_5 r\ln r + c_6 r + \frac{c_7}{r}\,. \tag{23}$$

Die Spannungskomponenten werden dann

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{r2} &= \left(\frac{f_2}{r}\right)'\sin\varphi &&= \left(2c_4 r + \frac{c_5}{r} - \frac{2c_7}{r^3}\right)\sin\varphi\,,\\
\sigma_{\varphi 2} &= f_2''\sin\varphi &&= \left(6c_4 r + \frac{c_5}{r} + \frac{2c_7}{r^3}\right)\sin\varphi\,,\\
\tau_{r\varphi 2} &= -\left(\frac{f_2}{r}\right)'\cos\varphi &&= -\left(2c_4 r + \frac{c_5}{r} - \frac{2c_7}{r^3}\right)\cos\varphi\,.
\end{aligned}\right| \tag{24}$$

Für $\varphi = 0$ und π verschwinden σ_{r2} und $\sigma_{\varphi 2}$, so daß wir diese Stellen als freie Enden betrachten können. Gleichzeitig haben die Schubspannungen ihren Größtwert. Dies entspricht also einem Belastungsfall, bei dem am freien Ende eine Querkraft übertragen wird. Da die Radialspannung σ_{r2} sowohl für $r = r_1$ als auch $r = r_2$ verschwinden soll, können zwei Konstante eliminiert werden:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{r2} &= 2c_4\left(r - \frac{r_1^2+r_2^2}{r} + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^3}\right)\sin\varphi\,,\\
\sigma_{\varphi 2} &= 2c_4\left(3r - \frac{r_1^2+r_2^2}{r} - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^3}\right)\sin\varphi\,,\\
\tau_{r\varphi 2} &= -2c_4\left(r - \frac{r_1^2+r_2^2}{r} + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^3}\right)\cos\varphi\,.
\end{aligned}\right| \tag{24a}$$

Die Konstante c_4 bestimmt man daraus, daß an der Stelle $\varphi = 0$

$$\int_{r_1}^{r_2}\tau_{r\varphi 2}\,dr = V = p\,l$$

sein muß (vgl. Abb. 4), woraus folgt

$$c_4 = -\frac{p\,l}{2\left[(r_1^2+r_2^2)\ln r_2/r_1 - (r_2^2-r_1^2)\right]}\,. \tag{25}$$

Für die Verschiebung erhält man aus den (17)

$$\left.\begin{aligned}
E\,\Delta r_2 &= \left[\frac{f_2}{r}(1-\mu^2) - f_2'\mu(1+\mu)\right]\sin\varphi + \frac{d\Phi}{d\varphi}\,,\\
E\,\Delta\varphi_2 &= -f_2''(1-\mu^2) - (1+\mu)(1-2\mu)\frac{f_2}{r^2}\cos\varphi - \frac{\Phi}{r} + R(r)\,.
\end{aligned}\right| \tag{26}$$

Die bei der Integration auftretende Funktion $R(r)$ muß aber verschwinden wegen $\Delta\varphi_2 = 0$ für $\varphi = \pi/2$, und die Funktion Φ bestimmt man mit Hilfe der dritten Gleichung (17) zu

$$\Phi = U_1\cos\varphi + U_2\sin\varphi - 2c_5(1-\mu^2)\varphi\sin\varphi\,.$$

Da $\Delta\varphi_2 = 0$ für $\varphi = \pi/2$ ist, muß $U_2 = c_5\pi(1-\mu^2)$ sein.

Das Glied mit U_1 entspricht lediglich einer Parallelverschiebung in der Richtung der langen Achse, die nicht interessiert, so daß $U_1 = 0$ gesetzt werden kann.

c) Ermittlung des statisch unbestimmten Momentes. Das an der Stelle $\varphi = 0$ übertragene Moment M_0 ist bisher unbestimmt geblieben. Wir ermitteln es aus der Forderung, daß der Mittelwert der Verdrehung zu beiden Seiten der Nahtstelle gleich ist:

$$\frac{1}{2h}\left(\int_{-h}^{h}\frac{\partial v}{\partial z}\,dz\right)_{y=l} = \frac{1}{r_2-r_1}\left(\int_{r_1}^{r_2}\frac{\partial(r\,\Delta\varphi)}{\partial r}\,dr\right)_{\varphi=0} \tag{27}$$

[1] *A.* und *L. Föppl*, Drang und Zwang 1, S. 307. München 1941.

ist. Aus (13) findet man aber mit $\mu = 0.3$

$$\frac{1}{2h}\left(\int_{-h}^{h}\frac{\partial v}{\partial z}\,dz\right)_{y=l} = \frac{l}{h}\left|\left(0{,}455\,\frac{l^2}{h^2} - 0{,}013\right)p - 1{,}365\,\frac{M_0}{h^2}\right|. \tag{28a}$$

Andererseits liefern (21) und (26)

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{r_2 - r_1}\left(\int_{r_1}^{r_2}\frac{\partial(r\,\Delta q)}{\partial r}\right)_{q=0} &= \frac{1}{r_2 - r_1}\left[(r\,\Delta q)_{r_2} - (r\,\Delta q)_{r_1}\right] \\ &= -1{,}82\,\pi\,c_3 - c_4\left|6{,}24\,(r_2 + r_1) + 1{,}04\,\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2 - r_1}\ln\frac{r_2}{r_1}\right|.\end{aligned}\right\} \tag{28b}$$

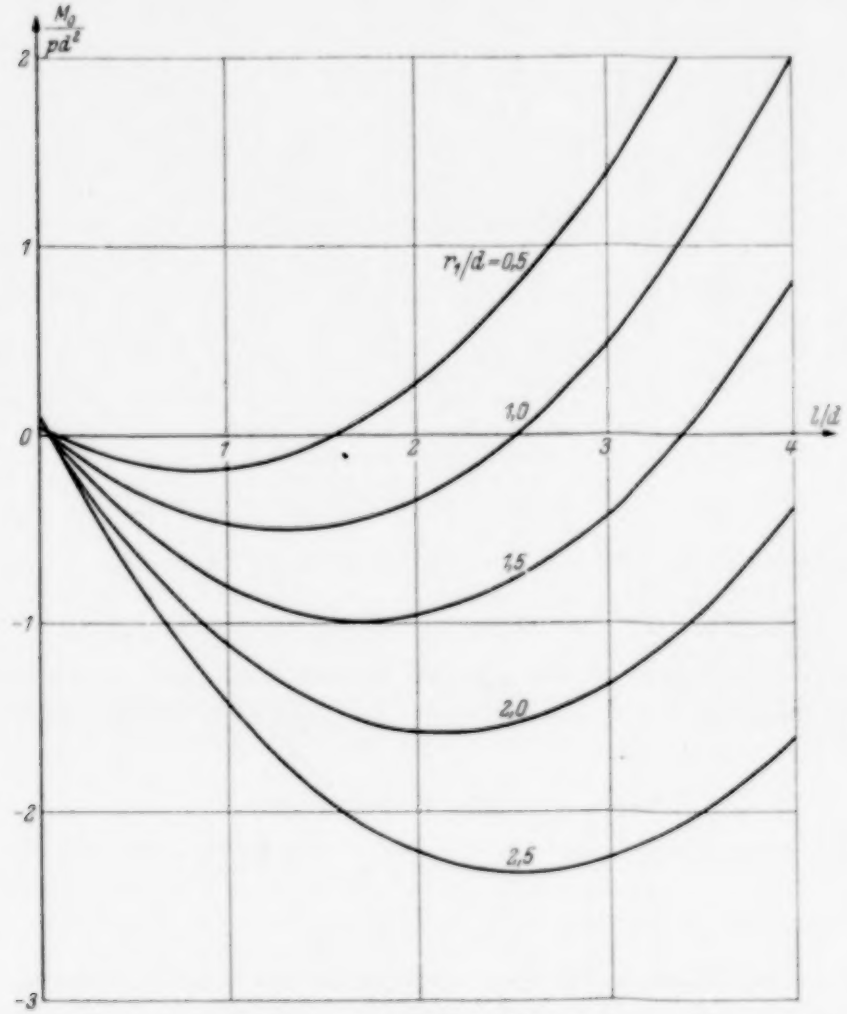


Abb. 5. Das an der „Nahtstelle" zwischen Rechteckteil und Randbögen übertragene Biegemoment in Abhängigkeit von den Abmessungsverhältnissen.

Aus der Gleichsetzung von (28a) und (28b) und durch Einsetzen der Konstanten c_3 und c_4 aus (20) und (25) erhält man für das Moment M_0 bei einer Querkontraktionszahl $\mu = 0{,}3$

$$\frac{M_0}{d^2} = \frac{3{,}64\left(\frac{l}{d}\right)^3 - F\cdot\frac{l}{d} + G}{10{,}92\,\frac{l}{d} + H}\,p \tag{29}$$

mit

$$d = 2h = r_2 - r_1,$$

$$F = 0{,}026 + \frac{6{,}24\,(r_2^2 - r_1^2) + 1{,}04\,(r_1^2 + r_2^2)\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\left|(r_1^2 + r_2^2)\ln\frac{r_2}{r_1} - (r_2^2 - r_1^2)\right|},$$

$$G = \frac{1{,}82\,\pi}{N}\left|(r_2^2 - r_1^2)\,r_1 r_2 - 2\,r_1^2 r_2^2\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\right|.$$

$$H = \frac{3{,}64\,\pi}{N}\,d^2\,(r_2^2 - r_1^2),$$

wobei N durch (20a) gegeben ist. Dieses Ergebnis ist in Abb. 5 dargestellt.

d) **Größte Beanspruchung.** Nach Anschauungen, die insbesondere von *A. Nadai*[1] vertreten werden, ist die Beanspruchung bei dickwandigen Rohren unter Innendruck nicht durch die größte Hauptspannung oder Hauptdehnung gegeben, sondern durch den Größtwert der spezifischen Formänderungsarbeit. Man erhält danach für die Fließgrenze

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]}\,. \tag{30}$$

Im vorliegenden Fall ist die Beanspruchung an der Innenseite der Randbögen, also für $r = r_1$ und $\varphi = \pi/2$ am größten, weil dort Größtwerte von Biege- und Zugspannungen zusammentreffen. Es ist dort

$$\sigma_1 = \sigma_r = -p, \tag{31a}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_2 = \sigma_\varphi &= -\frac{c_1}{r_1^2} + 2\,c_2 + c_3\,(3 + 2\ln r_1) - 4\,\frac{c_4}{r_1}\,(r_2^2 - r_1^2)\\ &= -p + 2\left(c_3 - \frac{c_1}{r_1^2}\right) - 4\,\frac{c_4}{r_1}\,(r_2^2 - r_1^2),\end{aligned}\right\} \tag{31b}$$

$$\sigma_3 = \sigma_x = \mu\,(\sigma_r + \sigma_\varphi) + \gamma, \tag{31c}$$

wobei[2]

$$\gamma = (1 - 2\,\mu)\,\frac{F_0}{F_1}\,p, \tag{32}$$

$F_0 = r_1^2\,\pi + 4\,l\,r_1$ die lichte Innenfläche,

$F_1 = (r_2^2 - r_1^2)\,\pi + 4\,l\,(r_2 - r_1)$ die Querschnittsfläche

ist. Formel (30) kann noch mit Hilfe von (31c) umgeformt werden zu

$$\sigma_v = \sqrt{(1 - \mu + \mu^2)\,(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (1 - 4\,\mu + 4\,\mu^2)\,\sigma_1\sigma_2 + \gamma^2 - \gamma\,(1 - 2\,\mu)\,(\sigma_1 + \sigma_2)}\,. \tag{33}$$

Zahlenergebnisse für das Verhältnis der größten Beanspruchung $\sigma_{v\,max}$ zum Innendruck p sind in Tabelle 1 in Abhängigkeit von den Parametern r_1/d und l/d zusammengestellt.

Tabelle 1. *Größte Beanspruchung* $\frac{\sigma_{v\,max}}{p}$.

l/d \ r_1/d	0,25	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
0	1,7918	1,9486	2,3102	2,7065	3,1579	3,5350
0,1	2,3382	2,4172	2,8165	3,2912	3,7878	4,2944
0,25	3,2839	3,2375	3,6801	4,2637	4,8889	5,5298
0,50	5,2106	4,9058	5,3871	6,1419	6,9725	7,8347
0,75	7,5681	6,9396	7,4172	8,3277	9,3559	10,4352
1,00	10,3526	9,3303	9,7615	10,8126	12,0303	13,3236
1,25	13,5625	12,0742	12,4142	13,5909	14,9924	16,4944
1,50	17,1968	15,1669	15,3710	16,6580	18,2353	19,9430
2,00	25,7360	22,3914	22,1846	23,6453	25,5331	27,6607
3,00	47,8906	40,9651	39,3613	40,9736	42,4531	46,3117
4,00	76,8014	65,1729	61,2163	62,7051	65,6285	69,1663

In Abb. 6 sind für eine angenommene Streckgrenze von 100 kg/mm² die maximal erreichbaren Drücke aufgetragen, wenn an keiner Stelle die Streckgrenze überschritten werden soll. Für höhere Streckgrenzen sind die Druckwerte mit einem entsprechenden Faktor zu multiplizieren. Vielfach werden jedoch noch Beanspruchungen zugelassen, bei denen örtlich die theoretische Fließgrenze überschritten wird. Beim erstmaligen Unterdrucksetzen der Feder tritt dann in einem gewissen

[1] *A. Nadai*, Der bildsame Zustand der Werkstoffe, Berlin 1927.
[2] Vgl. z. B. *W. Wuest*, Z. angew. Math. Mech. 32 (1952), S. 90.

Bereich (Abb. 7) plastisches Fließen ein, so daß bleibende Verformungen auftreten. Beim Entlasten der Feder bleiben innere Spannungen zurück, die den Betriebsspannungen entgegenwirken („Autofrettage" der Feder). Weiteres Fließen tritt jetzt nur dann ein, wenn der beim ersten Mal erreichte Druck überschritten wird. Bei der Betrachtung von Abb. 6 fällt auf, daß die Kurve $r_1/d = 0{,}5$ für große Werte von l/d die anderen Kurven schneidet. Dies ist offenbar auf eine Spannungserhöhung durch „Kerbwirkung" zurückzuführen.

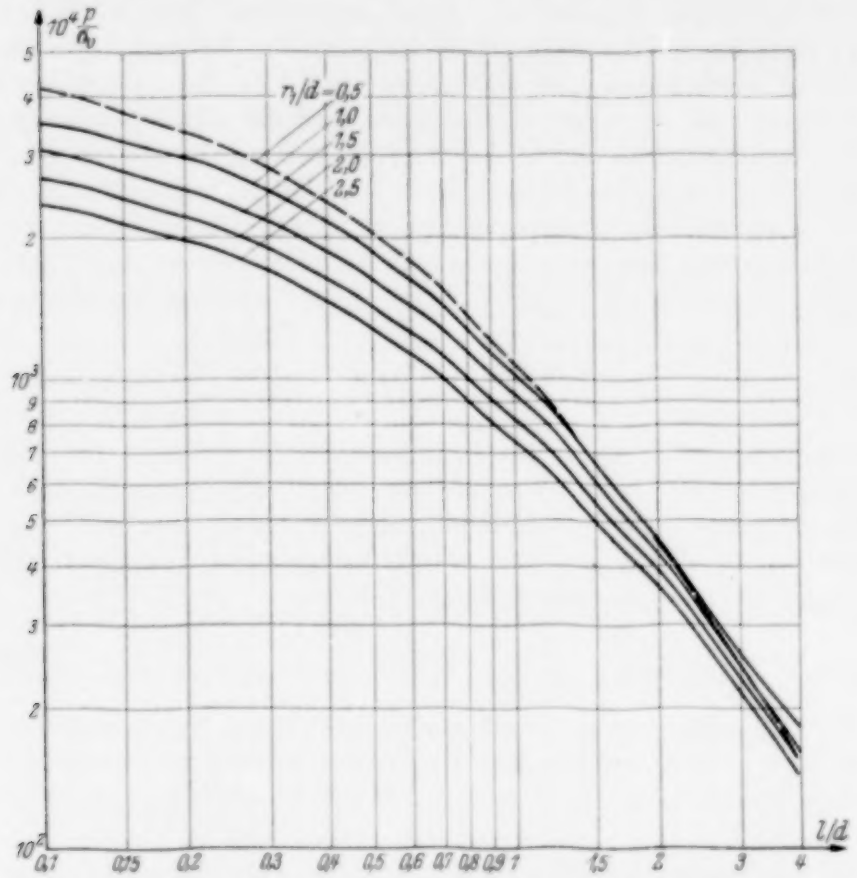


Abb. 6. Verhältnis von Höchstdruck zu Höchstbeanspruchung in Abhängigkeit von den Abmessungsverhältnissen. Für eine höchstzulässige Beanspruchung von 100 kg/mm² gibt die Ordinatenskala unmittelbar den Druck in kg/cm² an. Die Kurven gelten für rein elastische Verhältnisse, also ohne Berücksichtigung einer Autofrettage.

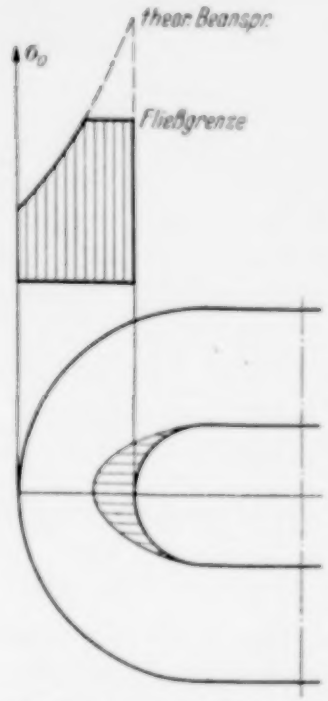


Bild 7. Autofrettage der Röhrenfeder. Durch Einleiten eines hohen Druckes wird in der am höchsten beanspruchten Zone die Fließgrenze überschritten. Die Spannungen wachsen dann nicht mehr weiter und der Werkstoff wird plastisch verformt. Beim Entlasten ergeben sich bleibende Formänderungen und innere Spannungen.

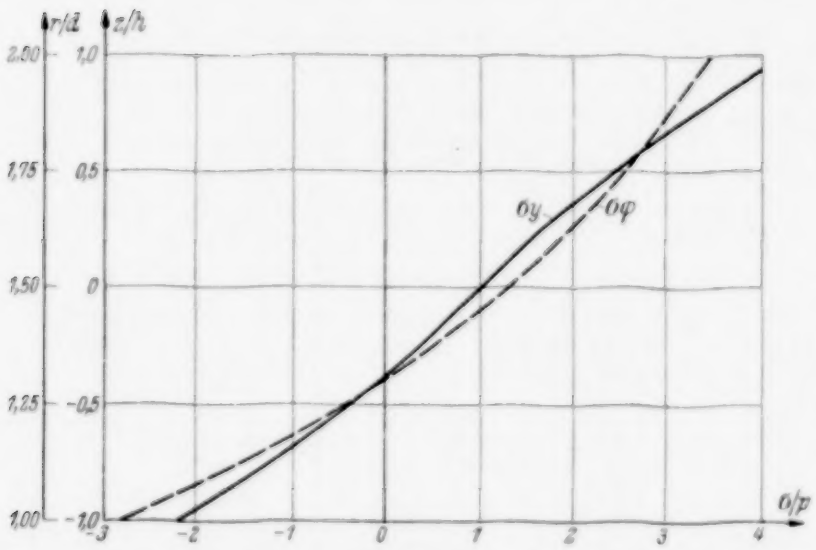


Bild 8a. Tangentialspannung zu beiden Seiten der Nahtstelle nach den Näherungsansätzen ($r_1/d = 1$; $l/d = 1$).

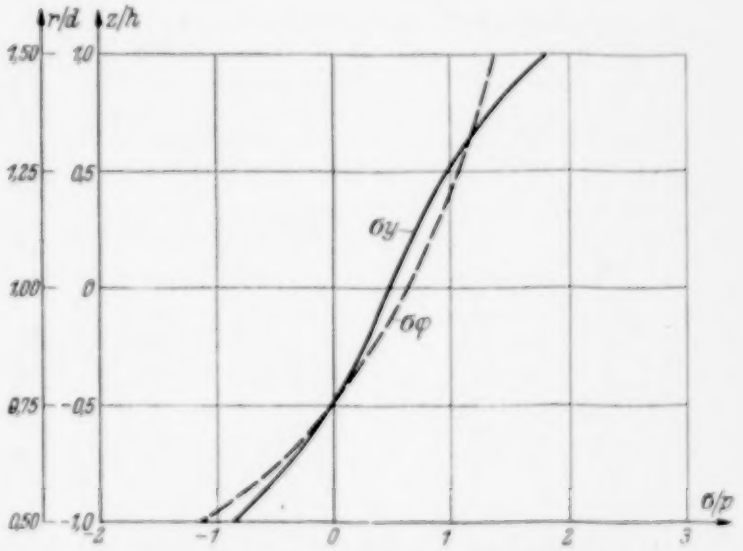


Bild 8b. Tangentialspannung zu beiden Seiten der Nahtstelle nach den Näherungsansätzen ($r_1/d = 0{,}5$; $l/d = 1$).

e) Spannungsverteilung an der Nahtstelle. Wegen unserer Näherungsannahmen hat die Spannungs- und Deformationsverteilung an der „Nahtstelle" zwischen dem geraden und dem gebogenen Abschnitt eine Unstetigkeit. Um uns ein Bild über die Größe dieser Unstetigkeit zu machen, ist für $r_1/d = 1$, $l/d = 1$ sowie $r_1/d = 0{,}5$ und $l/d = 1$ die Verteilung der Tangentialspannung σ_y bzw. σ_φ zu beiden Seiten der Nahtstelle berechnet worden. Wie Abb. 8a und 8b zeigen, ist der

Spannungssprung der Näherungslösung nur gering, vor allem wenn man ihn mit der maximalen Tangentialspannung an der Stelle $\varphi = \pi/2$ vergleicht, die in den beiden Fällen 10,12 p bzw. 9,61 p beträgt. Man kann also vermuten, daß die Näherungslösung auch noch in extremen Fällen ein einigermaßen zutreffendes Bild der Spannungsverteilung liefern wird.

3. Krümmungsänderung der Feder. Wegen der Krümmung des Federrohres rufen die Querschnittsdeformationen, wie in Abb. 9 schematisch angedeutet, „Ringspannungen" hervor. Wenn die Querschnittsabmessungen klein gegen den Krümmungshalbmesser sind, kann man näherungsweise mit einem mittleren Krümmungshalbmesser R_0 rechnen und die Ringspannungen sind dann gegeben durch $\sigma_x' = E\,w/R_0$, wenn w die Deformation in der radialen z-Richtung ist. Die Ringspannungen rufen ein Moment hervor, dem die Feder durch Vergrößerung des Krümmungshalbmessers nachgibt. Bezeichnen wir die Krümmungsänderung mit $\omega = \Delta R/R_0$, so ist das resultierende Moment

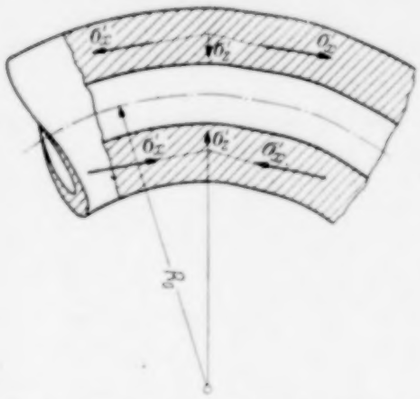


Bild 9. Ringspannungen σ_x' infolge der Krümmung der Röhrenfeder.

$$M = \int_{F_1}\int E\frac{w}{R_0}\,\bar{z}\,df - \int_{F_1}\int E\omega\,\frac{\bar{z}^2}{R_0}\,dF = 0,$$

wenn die Feder nicht durch äußere Kräfte belastet ist. Die Integration ist dabei über die gesamte Querschnittsfläche F_1 zu erstrecken, und $\bar{z}$ bezeichnet den Abstand von der Symmetrielinie, also $\bar{z} = z + r_1 + d/2$ im geraden Abschnitt und $\bar{z} = r\cos\varphi$ im Randbogen. Daraus folgt aber für die Krümmungsänderung

$$\omega = \frac{\iint w\,\bar{z}\,dF}{\iint \bar{z}^2\,dF}\,. \tag{34}$$

In Abb. 9 ist angedeutet, daß die Ringspannungen durch radial gerichtete Spannungen σ_z' im Gleichgewicht gehalten werden müssen. Damit wirken also die Deformationen vermittels der Ringspannungen auf den ursprünglichen Spannungszustand zurück. Bei dickwandigen Federn ist der Einfluß dieser Rückwirkung nur gering und kann im allgemeinen vernachlässigt werden. Bei dünnwandigen Federn muß dagegen die Rückwirkung berücksichtigt werden, wie eingangs erwähnt wurde.

a) Berechnung der Krümmungsänderung. Bei der Berechnung des Ausdrucks (34) zerlegen wir den Integrationsbereich in den geraden und den gekrümmten Abschnitt. Im geraden Teil ist w durch (14) und (14a) gegeben. Die Integrationskonstante c_0 ermitteln wir aus der Bedingung daß an der Nahtstelle $y = l$ bzw. $\varphi = 0$

$$\int_{-h}^{h} w\,dz = \int_{r_1}^{r_2} \Delta r\,dr$$

sein muß, wobei $\Delta r = \Delta r_1 + \Delta r_2$ mit Δr_1 aus (21a) und Δr_2 aus (26). Man findet so

$$\left.\begin{aligned} c_0 = {} & \left[2{,}275\left(\frac{l}{d}\right)^4 + 1{,}384\left(\frac{l}{d}\right)^2 - 0{,}05043\right] d \\ & - \left[5{,}46\left(\frac{l}{d}\right)^2 - 0{,}5\right] d\cdot\frac{M_0}{p\,d^2} + \left|-\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{r_2 - r_1}\,c_1 + 0{,}4\,(r_1 + r_2)\,c_2\right| \\ & + \left[0{,}4\,\frac{r_2^2\ln r_2 - r_1^2\ln r_1}{r_2 - r_1} - 0{,}7\,(r_1 + r_2)\right] c_3\left|\frac{1{,}3}{p} - 5{,}71\,(r_1^2 + r_2^2)\,\frac{c_1}{p}\right. . \end{aligned}\right| \tag{35}$$

Hierbei ist wieder $\mu = 0{,}3$ gesetzt.

Im gekrümmten Abschnitt ist

$$w = \Delta r\cos\varphi - r\,\Delta\varphi\sin\varphi$$

mit

$$\Delta r = \Delta r_1 + \Delta r_2\,, \qquad \Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2\,.$$

Setzt man noch für das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche um die große Achse

$$\iint_{F_1} \bar{z}^2\,dF = J = \frac{4}{3}\,l\,(r_2^3 - r_1^3) + \frac{\pi}{4}\,(r_2^4 - r_1^4)\,, \tag{36}$$

so erhält man schließlich für den Ausdruck (34)

$$\omega\frac{E}{p}=\frac{1}{J}\left\{\frac{4\,l^3\,b}{d^2}\left[-0{,}819-0{,}5266\left(\frac{d}{l}\right)^2+0{,}0561\left(\frac{d}{l}\right)^4-0{,}0325\left(\frac{d}{l}\right)^4\frac{r_1}{b}\right.\right.$$
$$\left.-0{,}0379\left(\frac{d}{l}\right)^4\frac{d}{b}\right]+4\,\frac{M_0}{p\,d^2}\,l^3\,b\left[1{,}82-0{,}5\left(\frac{d}{l}\right)^2\right]+4\,c_0\,b\,d\,l$$
$$+\frac{1{,}3\,\pi}{p}\left[-\frac{(r_2^2-r_1^2)}{2}\,c_1+0{,}200\,(r_2^4-r_1^4)\,c_2\right.$$
$$+\left(0{,}200\,(r_2^4\ln r_2-r_1^4\ln r_1)+0{,}0500\,(r_2^4-r_1^4)\right)c_3$$
$$\left.\left.-\left(0{,}59982\,(r_2^5-r_1^5)+1{,}7542\,r_1^2\,r_2^2\,(r_2-r_1)\right)c_4\right]\Bigg\}-\frac{\mu\gamma}{p}\,. \tag{37}$$

Dabei ist $b=r_i+d/2$ die mittlere kleine Halbachse des Querschnittes. Der Summand $\mu\gamma/p$ am Schluß von Formel (37) ist dabei in folgender Weise entstanden: In den Formeln für die Deformationen sind bisher die linearen Glieder in der axialen Spannung $\Delta\sigma_x=\beta\,\bar{z}+\gamma$ vernachlässigt worden, wobei $\gamma=(1-2\mu)\,(F_0/F_1)\,p$ und $\beta=\omega\,E/R_0$ ist. Diese Anteile liefern für die Deformationen v^* und w^*

$$\frac{\partial v^*}{\partial y}=-\mu\left(\frac{\omega}{R_0}\,\bar{z}+\frac{\gamma}{E}\right),\qquad \frac{\partial w^*}{\partial z}=-\mu\left(\frac{\omega}{R_0}\,\bar{z}+\frac{\gamma}{E}\right),$$

also

$$v^*=-\mu\left(\frac{\omega}{R_0}\,\bar{z}\,y+\frac{\gamma\,y}{E}\right)+V(z),\qquad w^*=-\mu\left(\frac{\omega}{R_0}\,\bar{z}^2+\frac{\gamma\,\bar{z}}{E}\right)+W(y).$$

Dabei ist aber $V(z)=0$, weil $v^*=0$ für $y=0$ wird. Ferner findet man aus

$$\frac{\partial v^*}{\partial z}+\frac{\partial w^*}{\partial y}=0$$

die Beziehung

$$W(y)=\frac{\mu}{2}\,\frac{\omega}{R_0}\,y^2+\text{const}\,,$$

so daß schließlich

$$\int_{F_1}\int w^*\,\bar{z}\,dF=-\frac{\mu\gamma}{E}\int_{F_1}\int z^2\,dF=-\frac{\mu\gamma}{E}\,J$$

wird. Durch Auswerten der Formel (37) ist die Tabelle 2 entstanden.

Tabelle 2. *Krümmungsänderung $\omega\,E/p$.*

l/d \ r_i/d	0,25	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50
0	0,1210	0,3425	0,8267	1,3005	1,7610	2,2087
0,1	0,2329	0,5312	1,2115	1,9014	2,6367	3,4183
0,25	0,5551	0,9943	1,9554	3,0309	4,2817	5,5675
0,5	1,3753	2,1305	3,7581	5,5394	7,8004	10,136
0,75	2,7650	4,1099	6,4126	9,2333	12,450	16,093
1,0	4,9370	6,6148	10,118	14,075	18,561	23,622
1,25	8,1309	10,389	15,084	20,339	26,903	32,911
1,5	12,613	15,522	21,533	28,238	37,755	44,158
2	26,642	30,915	39,849	49,801	60,974	73,347
3	85,431	91,074	105,726	123,110	142,794	176,398
4	205,878	210,281	227,162	251,215	280,040	353,199

b) Exzentrizitätskorrektur. Bei der bisherigen Berechnung wurde angenommen, daß der Querschnitt symmetrisch in bezug auf die Linie $\bar{z}=0$ ist. Dies trifft aber nur in erster Näherung zu. Bei der Herstellung von Hochdruckfedern wird nämlich das ursprünglich gerade Rohr in rotglühendem Zustand (also bei niedriger Fließgrenze) gebogen. Dabei werden die dem Krümmungsmittelpunkt zugewandten Fasern gestaucht, während im äußeren Bereich die Wandstärke

verringert wird. Der Querschnitt wird also unsymmetrisch. Wie in einer früheren Veröffentlichung[1] nachgewiesen wurde, tritt aber bei Rohren mit unsymmetrischer Querschnittsform unter der Wirkung eines Innendrucks ein zusätzlicher Krümmungseffekt auf, der im vorliegenden Fall dem ursprünglichen entgegenwirkt. Zur Berechnung dieses Effektes wollen wir die vereinfachende Annahme machen, daß die Verformung der Feder ideal-plastisch vor sich gehen soll. Dann gelten die Beziehungen

$$\varepsilon_y = -\frac{1}{2}\varepsilon_x, \qquad \varepsilon_z = -\frac{1}{2}\varepsilon_x.$$

Nun ist aber

$$\varepsilon_x = \frac{\bar{z}}{R_0}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

also

$$v = -\frac{1}{2}\frac{y\bar{z}}{R_0} + V(\bar{z}), \qquad w = -\frac{1}{4}\frac{\bar{z}^2}{R_0} + W(y).$$

Wegen $v = 0$ für $y = 0$ muß $V(\bar{z}) = 0$ sein. Ferner gilt

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

so daß

$$-\frac{1}{2}\frac{y}{R_0} + W'(y) = 0$$

und demnach

$$v = -\frac{1}{2}\frac{y\bar{z}}{R_0}, \qquad w = \frac{1}{4}\frac{y^2 - \bar{z}^2}{R_0} \tag{38}$$

wird. Diese Formeln gelten natürlich nur, solange die Verschiebungen klein gegenüber den ursprünglichen Abmessungen sind.

1. Anwendung auf den Kreiszylinder. Hier ist

$$\Delta r = v\cos\varphi + w\sin\varphi, \qquad y = r\cos\varphi, \qquad \bar{z} = r\sin\varphi.$$

Damit ergibt sich

$$\Delta r = -\frac{r^2}{4R_0}\sin\varphi. \tag{39}$$

Die zusätzliche Krümmungsänderung ist aber gegeben durch

$$\omega_1 = (1 - 2\mu)\frac{F_0\,\Delta s}{J}\frac{p}{E}, \tag{40}$$

wobei F_0 der lichte Innenquerschnitt, J das Trägheitsmoment des Wandquerschnittes in bezug auf den Schwerpunkt, Δs der Abstand zwischen dem Schwerpunkt des Innenquerschnittes und des Wandquerschnittes ist. Die Verschiebung des Innenquerschnittes ist aber nach (38)

$$s_1 = -\frac{r_1^2}{4R_0}$$

und die des Wandquerschnittes

$$s_2 = -\frac{r_2^4 - r_1^4}{4R_0(r_2^2 - r_1^2)} = -\frac{r_1^2 + r_2^2}{4R_0},$$

so daß man

$$\Delta s = s_2 - s_1 = -\frac{r_2^2}{4R_0}$$

hat. Damit wird die zusätzliche Krümmungsänderung (bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung)

$$\omega_1 = -(1 - 2\mu)\frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^4 - r_1^4}\frac{p}{E}. \tag{41}$$

2. Anwendung auf den Flachbogenquerschnitt. Wir teilen hier den Querschnitt wieder in den geraden Innenteil und die Randbögen ein. Die Verschiebungen im Innenteil sind durch die Beziehungen (38) gegeben.

[1] *W. Wuest*, Z. angew. Math. Mech. 32 (1952), S. 90.

In den Randbögen setzen wir für die innere Begrenzung (Abb. 10)

$$y = l + r_1 \sin\varphi\,, \qquad z = r_1 \cos\varphi\,,$$

so daß die Beziehungen (38) dort die Form

$$v = -\frac{1}{2}\,\frac{r_1 \cos\varphi\,(l + r_1 \sin\varphi)}{R_0}\,,$$

$$w = \frac{1}{4}\,\frac{(l + r_1 \sin\varphi)^2 - r_1^2 \cos\varphi}{R_0}$$

annehmen. Die radiale Verschiebung in den Randbögen ist dann

$$\Delta r = v \sin\varphi + w \cos\varphi\,,$$

so daß

$$\Delta r = \frac{1}{4\,R_0}\,(l^2 - r_1^2)\cos\varphi$$

wird. Das Flächenmoment der deformierten flachbogenförmigen Querschnittsfläche in bezug auf die alte Symmetrieachse ist dann

$$M(r, l) = \frac{1}{R_0}\left[\frac{r\,l^3}{3} - l\,r^2 + \frac{\pi}{4}\,r^2\,(l^2 - r^2)\right],$$

wobei $r = r_1$ für die innere Begrenzung, $r = r_2$ für die äußere Begrenzung gilt. Führt man noch die innere Querschnittsfläche

$$F_0 = 4\,l\,r + r_1^2\,\pi$$

und die Wandquerschnittsfläche

$$F_1 = 4\,l\,(r_2 - r_1) + (r_2^2 - r_1^2)\,\pi$$

ein, so beträgt die durch die Deformation des Querschnittes beim Herstellungvorgang verursachte zusätzliche Krümmungsänderung beim Unterdrucksetzen der Feder

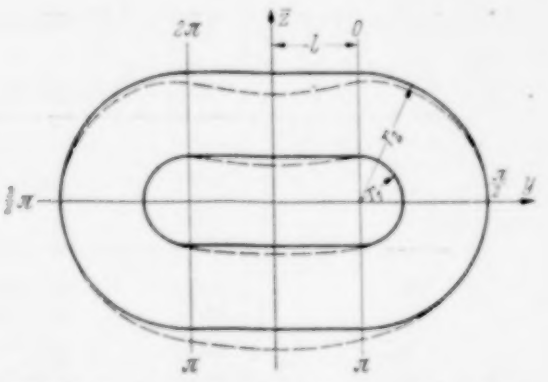


Bild 10. Plastische Formänderung (übertrieben) beim Herstellungsvorgang (Krümmen der Röhrenfeder).

$$\omega_1 = -(1 - 2\,\mu)\,\frac{[M(r_2, l) - M(r_1, l)]\,\dfrac{F_0}{F_1} - M(r_1, l)}{J}\,R_0\,\frac{p}{E}\,. \tag{42}$$

In Tabelle 3 sind Zahlenwerte für die Größe $-\omega_1\,E/p$ zusammengestellt, die durch Auswerten von Formel (42) gewonnen worden sind.

Tabelle 3. *Exzentrizitätskorrektur* $\omega_1\,E/p$.

l/d \ r_1/d	0,25	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
0	0,0160	0,0450	0,1067	0,1654	0,2215	0,2759
0,1	0,0216	0,0518	0,1098	0,1722	0,2282	0,2925
0,25	0,0279	0,0601	0,1228	0,1814	0,2374	0,2918
0,50	0,0344	0,0697	0,1349	0,1945	0,2511	0,3056
0,75	0,0377	0,0754	0,1435	0,2050	0,2624	0,3178
1,00	0,0387	0,0771	0,1495	0,2144	0,2718	0,3281
1,25	0,0382	0,0792	0,1530	0,2188	0,2793	0,3368
1,50	0,0367	0,0784	0,1551	0,2230	0,2852	0,3441
2,00	0,0313	0,0735	0,1547	0,2270	0,2930	0,3547
3,00	0,0153	0,0545	0,1418	0,2222	0,2952	0,3634
4,00	−0,0043	0,0304	0,1190	0,2094	0,2852	0,3593

4. Winkeldrehung und Federweg. Technisch kann man sowohl die Winkeldrehung als auch die Verschiebung des Federendes ausnutzen. Um beides zu berechnen nehmen wir an, daß die Feder, die im Ausgangszustand einen Kreis mit dem Halbmesser R_0 und dem Windungswinkel ψ_0 bildet, unter der Wirkung des Innendruckes in einen größeren Kreis mit dem Halbmesser R und dem

Windungswinkel ψ übergeht. Wenn die Dehnung in der Achsenrichtung des Rohres mit ε bezeichnet wird, muß offenbar für die Federlänge gelten

$$R\,\psi - R_0\,\psi_0 = \varepsilon\,R_0\,\psi_0\,.$$

Ferner gilt

$$R = R_0\,(1 + \omega_k)\,,$$

wobei $\omega_k = \omega + \omega_1$ die wegen des Exzentrizitätseinflusses korrigierte Krümmungsänderung ist. Demnach gilt

$$\psi = \psi_0\,\frac{1+\varepsilon}{1+\omega_k} \approx \psi_0\,(1 + \varepsilon - \omega_k)\,,$$

und die Winkeldrehung ist

$$\Delta\psi = \psi_0 - \psi = \psi_0\,(\omega_k - \varepsilon)\,. \tag{43}$$

Dabei ist die Längungskorrektur [vgl. (31c)]

$$E\,\varepsilon = \sigma_x - \mu\,(\sigma_y + \sigma_z) = \gamma = (1 - 2\,\mu)\,\frac{F_0}{F_1}\,p\,. \tag{44}$$

Durch Auswerten dieser Formel ist Tabelle 4 entstanden, in der Zahlenergebnisse für $\varepsilon\,E/p$ in Abhängigkeit von r_1/d und l/d zusammengestellt sind.

Tabelle 4. *Längungskorrektur* $\varepsilon\,E/p = \gamma/p$.

l/d \ r_1/d	0,25	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
0	0,0167	0,0500	0,1333	0,2250	0,3200	0,4167
0,1	0,0232	0,0590	0,1442	0,2366	0,3319	0,4288
0,25	0,0313	0,0706	0,1589	0,2526	0,3487	0,4461
0,50	0,0415	0,0862	0,1800	0,2765	0,3742	0,4726
0,75	0,0491	0,0985	0,1977	0,2973	0,3970	0,4968
1,00	0,0549	0,1084	0,2128	0,3155	0,4174	0,5188
1,25	0,0596	0,1165	0,2258	0,3317	0,4359	0,5390
1,50	0,0633	0,1233	0,2371	0,3462	0,4527	0,5575
2,00	0,0691	0,1340	0,2558	0,3709	0,4820	0,5905
3,00	0,0766	0,1485	0,2827	0,4082	0,5279	0,6436
4,00	0,0810	0,1577	0,3012	0,4350	0,5622	0,6845

Die Koordinaten des Federendes sind im Ausgangszustand

$$x_{E0} = -\,R_0 \sin\psi_0\,,$$
$$y_{E0} = R_0\,(1 - \cos\psi_0)$$

und im deformierten Zustand

$$x_E = -\,R_0\,(1 + \omega_k)\,\sin\left(\psi_0\,\frac{1+\varepsilon}{1+\omega_k}\right),$$

$$y_E = R_0\,(1 + \omega_k)\left[1 - \cos\left(\psi_0\,\frac{1+\varepsilon}{1+\omega_k}\right)\right].$$

Die Verschiebung des Federendes

$$s = \sqrt{(x_E - x_{E0})^2 + (y_E - y_{E0})^2}$$

wird daher, wenn man nach den kleinen Größen ε und ω_k entwickelt,

$$s = R_0\,\omega_k\left[(2 + \psi_0^2 - 2\,\psi_0 \sin\psi_0 - 2\cos\psi_0) - 2\,\frac{\varepsilon}{\omega_k}\,(\psi_0^2 - \psi_0 \sin\psi_0) + \left(\frac{\varepsilon}{\omega_k}\right)^2 \psi_0^2\right]^{1/2}. \tag{45}$$

Die Krümmungsänderung $\omega\,E/p$ ist in Abb. 11 in Abhängigkeit von der Größe l/d für verschiedene Werte von r_1/d aufgetragen. In das gleiche Kurvenblatt sind strichpunktiert die Kurven $\Delta\psi\,E/\psi_0\,p$ eingetragen, die sich von den anderen nur durch die Exzentrizitäts- und Längungskorrektur unterscheiden. Für kleine Werte von l/d sind die Unterschiede merklich, dagegen für $l/d > 1$ nur sehr gering. Abb. 12 stellt eine Kombination von Abb. 11 mit Abb. 6 dar, in dem hier $\Delta\psi\,E/\psi_0\,\sigma_v$ über $10^4\,p/\sigma_v$ aufgetragen ist. Für eine Grenzbeanspruchung $\sigma_v = 100$ kg/mm² gibt demnach die Abszissenskala unmittelbar den Nenndruck in kg/cm² an. Die berechneten Kurven gestatten nur

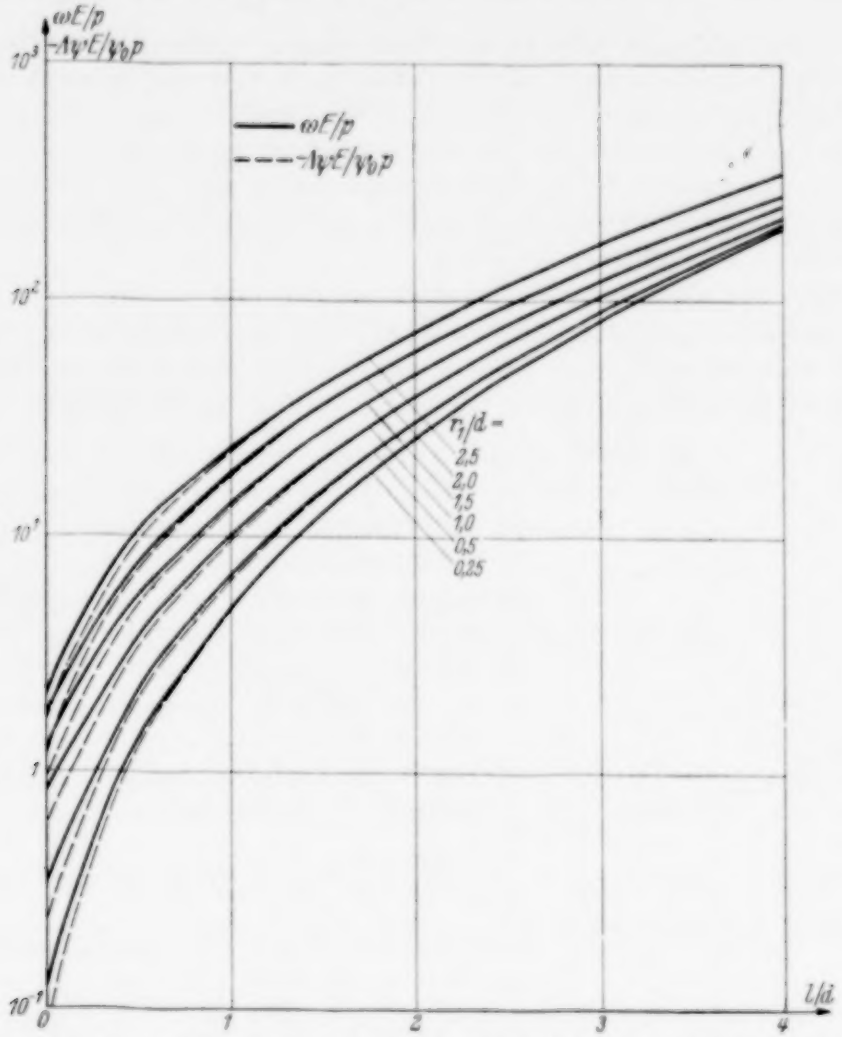


Abb. 11. Krümmungsänderung $\omega\, E/p$ (ausgezogene Kurven) und Winkeldrehung $(\Delta\psi/\psi_0)\,(E/p)$ (gestrichelte Kurven).

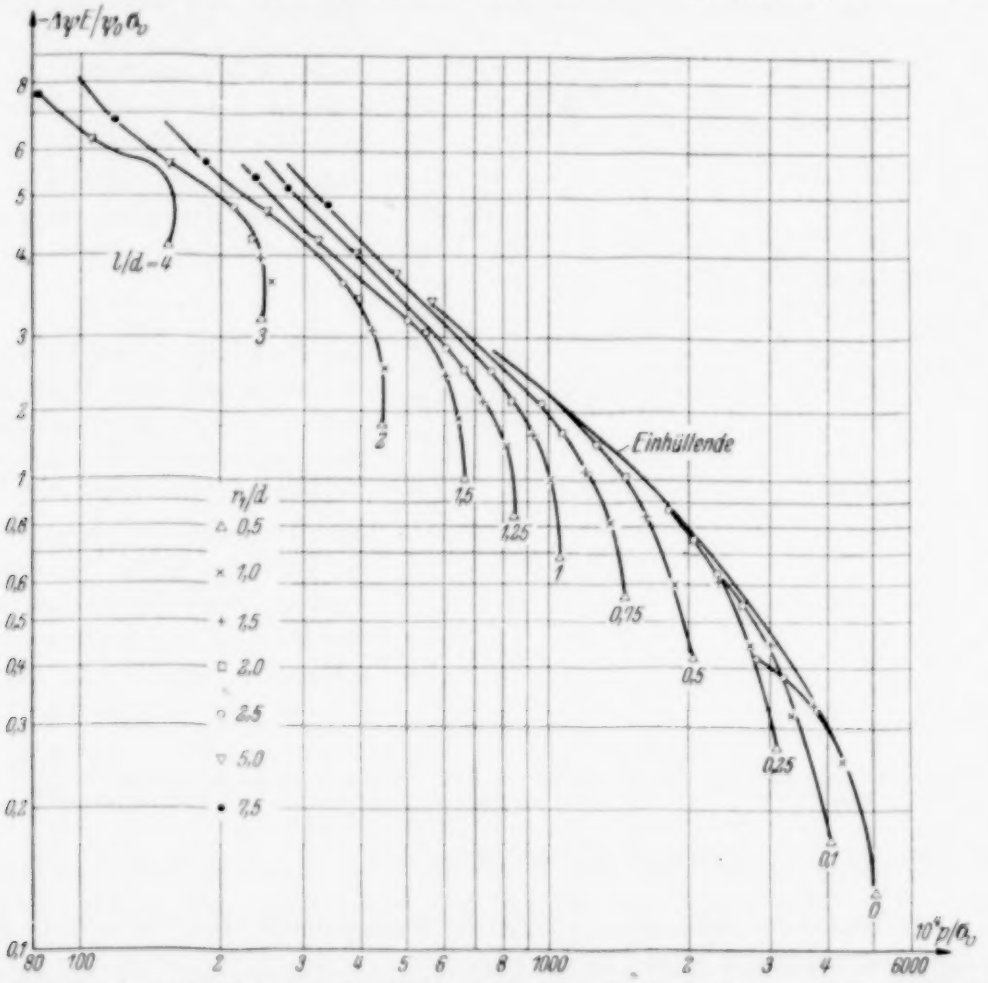


Abb. 12. Winkeldrehung $\Delta\psi$ in Abhängigkeit vom Nenndruck bei gegebenem Windungswinkel ψ_0 und Elastizitätsmodul E und höchstzulässiger Beanspruchung σ_v. Die Abszissenskala gibt für eine zulässige Beanspruchung von 100 kg/mm² unmittelbar den Nenndruck in kg/cm² an. Die Einhüllende kennzeichnet die bei rein elastischer Beanspruchung erreichbaren Bestwerte.

im rechten unteren Teil eine Einhüllende als Optimalkurve einzuzeichnen. Immerhin zeigt diese Darstellung, daß der Federquerschnitt mit wachsendem Nenndruck immer kreisähnlicher werden muß. Die Winkeldrehung nimmt mit wachsendem Nenndruck immer mehr ab.

Es ist allerdings zu bemerken, daß die Kurven nur für rein elastische Spannungszustände gelten. Wie schon erwähnt, wendet man bei Hochdruckröhrenfedern stets eine Autofrettage an. Hierfür ist aber eine größere Wandstärke günstiger, und es kann daher vorteilhafter sein, unterhalb der elastischen Optimalkurve zu bleiben.

Aus Abb. 13 kann die Größe ε/ω_k entnommen werden und in Abb. 14 ist die durch (45) bestimmte Funktion $s/R_0\,\omega_k$ aufgetragen. Für die praktische Anwendung ist es jedoch zweckmäßiger, den Federweg nicht aus Formel (45) zu berechnen, weil die Bewegung gewöhnlich doch nicht

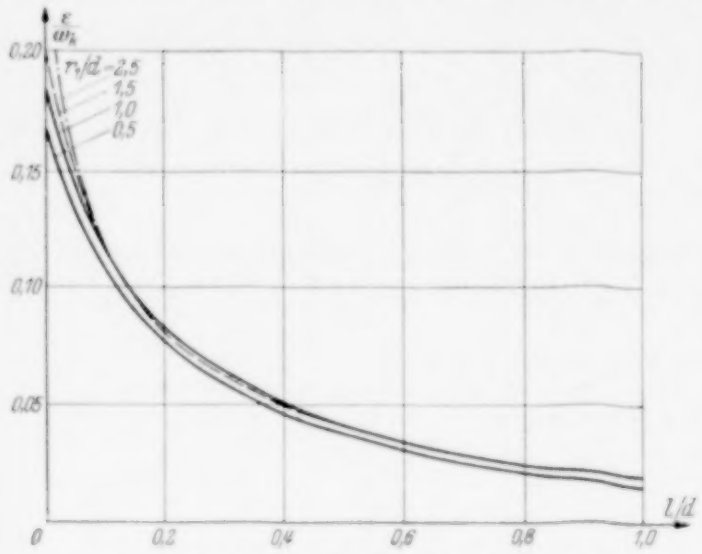


Abb. 13. Abhängigkeit der Hilfsgröße ε/ω_k von r_i/d und l/d.

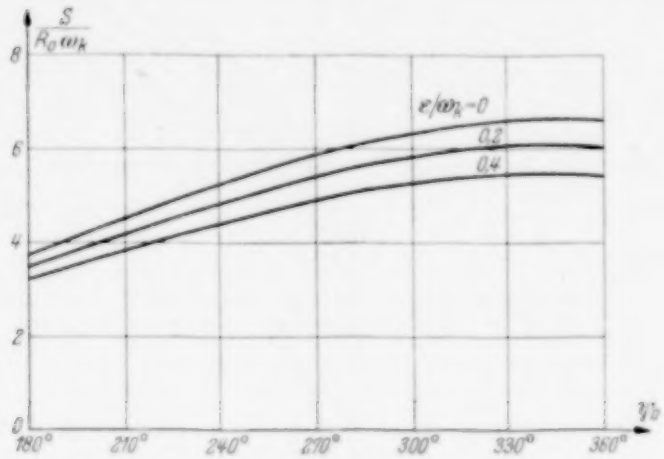


Abb. 14. Abhängigkeit der Bewegung des Federendes s vom Windungswinkel ψ_0.

am theoretischen Federende abgenommen wird, auf das sich diese Formel bezieht (vgl. Abb. 18). Richtiger ist es, zunächst den „Polarpunkt" der Feder zu bestimmen. Dies ist der Punkt, um den sich eine am Federende befestigte Ebene bei kleinen Druckänderungen dreht. Wenn man den Polarpunkt kennt, braucht man lediglich den Polstrahl k bzw. k' (Abb. 15) abzugreifen, d. h. die Entfernung vom Polarpunkt zu der Stelle, an der die Bewegung abgenommen wird. Der Federweg ist dann

$$s = k'\,\Delta\psi\,, \tag{46}$$

und die Richtung der Verschiebung steht senkrecht auf dem Polstrahl. Für den Fall $\varepsilon/\omega_k = 0$, der bei dünnwandigen *Bourdon*federn stets vorliegt, ist die Polarkurve bereits früher[1] berechnet worden. Im folgenden soll der Polarpunkt für beliebige Werte von ε/ω_k berechnet werden. Wir gehen dabei von den früher abgeleiteten Gleichungen für die Rastpolbahn (Herpolhodie) des Federendes aus die auch hier gültig sind:

$$x_p = x_E + \frac{dy_E}{d\psi}\,,$$

$$y_p = y_E - \frac{dx_E}{d\psi}\,.$$

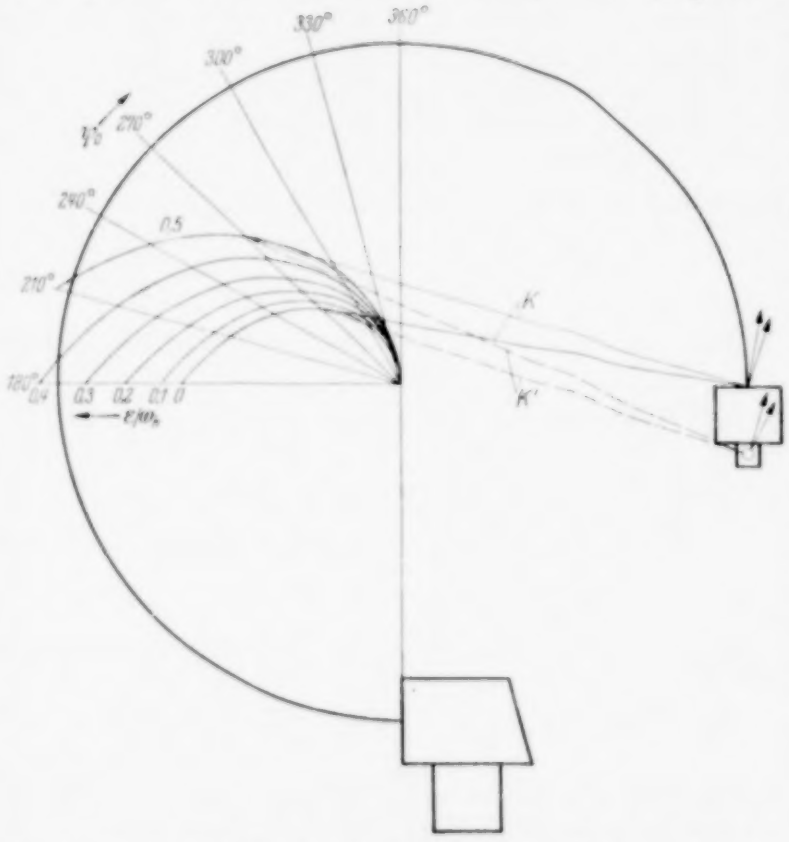


Abb. 15. Lage des Polarpunktes in Abhängigkeit vom Windungswinkel ψ_0 und von der Hilfsgröße ε/ω_k.

Als Polarpunkt bezeichnen wir denjenigen Punkt der Rastpolbahn, für den $\varepsilon \to 0$, $\omega_k \to 0$ d. h. den Momentanpol für unendlich kleine Bewegungen).

[1] *W. Wuest*, Z. Instrumentenkde. 63 (1943), S. 416.

Wenn wir berücksichtigen, daß

$$d\psi = -\psi_0\left(1 - \frac{\varepsilon}{\omega_k}\right) d\omega ,$$

so erhalten wir als Koordinaten des Polarpunktes

$$x_{p0} = -R_0 \frac{1-\cos\psi_0}{\psi_0} \frac{\omega_k}{\omega_k - \varepsilon}, \qquad y_{p0} = R_0\left(1 - \frac{\sin\psi_0}{\psi_0} \frac{\omega_k}{\omega_k - \varepsilon}\right). \tag{45}$$

Für $180^\circ \leq \psi_0 \leq 360^\circ$ und $0 \leq \varepsilon/\omega_k \leq 0{,}5$ ist diese Beziehung in Abb. 15 aufgetragen. Im gleichen Bild ist für $\psi_0 = 270^\circ$ und $\varepsilon/\omega_k = 0$ bzw. 0,5 angedeutet, welche Lage der Polstrahl k zum theoretischen Federende und der Polstrahl k' zur tatsächlichen Bewegungsabnahme hat. Damit sind wir in der Lage, die Bewegung des freien Endes der Röhrenfeder vollständig zu beschreiben.

5. Vergleich mit der Mitteldruckfeder. Wenn in den hier abgeleiteten Formeln r_1/d sehr groß wird bzw. d/r_1 gegen 0 geht, gelangen wir zum Grenzfall der „Mitteldruckfeder". Diese Bezeichnung soll andeuten, daß dieser Grenzfall näherungsweise bei Röhrenfedern mittlerer Druckbereiche (Nenndruck etwa zwischen 50 und 200 kg/cm²) verwirklicht ist. Streng genommen ist nämlich der Grenzübergang $d/r_1 \to 0$ in unsern Formeln nicht erlaubt, weil man dann in den Bereich der dünnwandigen Niederdruckfedern kommt. Zur Interpolation ist es jedoch nützlich, den Fall $r_1/d \to \infty$ als mathematische Grenzkurve einzutragen, der man sich allerdings nur soweit nähern darf, als die Bedingung

$$a^2/dR_0 < 1 \text{ (wobei } a = r_1 + \frac{1}{2}d + l$$

die mittlere große Halbachse des Querschnittes bezeichnet) noch erfüllt ist. Wenn wir diese Grenzkurve mit den für endliches r_1/d erhaltenen Werten vergleichen wollen, ist es zweckmäßig, als Parameter das mittlere Achsenverhältnis $\varkappa = b/a = (r_1 + d/2)/(r_1 + d/2 + l)$ einzuführen und für die größte Beanspruchung σ_v und die Winkeldrehung $\Delta\psi$ folgende Ansätze zu machen:

Tabelle 5.

$\varkappa$	F_1	F_2
0	1,7776	0,2427
0,1	1,6605	0,3089
0,2	1,5170	0,3568
0,3	1,3536	0,3841
0,4	1,1757	0,3897
0,5	0,9875	0,3736
0,6	0,7926	0,3363
0,7	0,5941	0,2787
0,8	0,3944	0,2024
0,9	0,1958	0,1088
1,0	0	0

$$\frac{\sigma_v}{p} = \left(\frac{a}{d}\right)^2 F_1(\varkappa, r_1/d, \mu) ,$$

$$\frac{\Delta\psi}{\psi_a} = \left(\frac{a}{d}\right)^3 \frac{1}{\varkappa} F_2(\varkappa, r_1/d, \mu) .$$

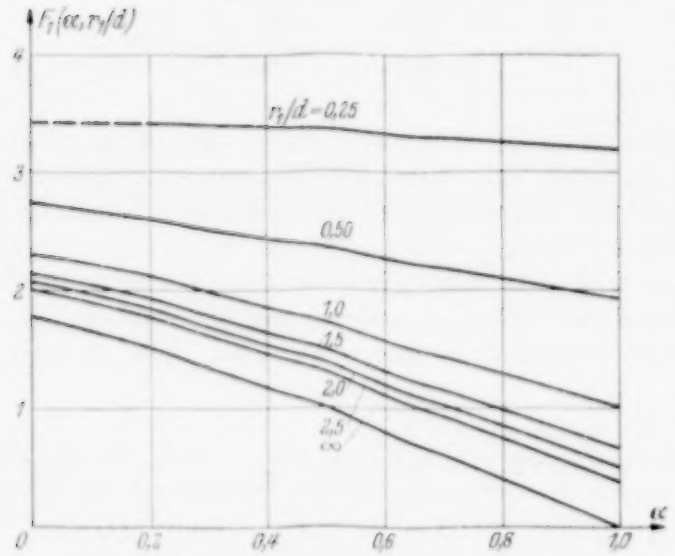


Abb. 16. Hilfsfunktion zur Berechnung der größten Beanspruchung.

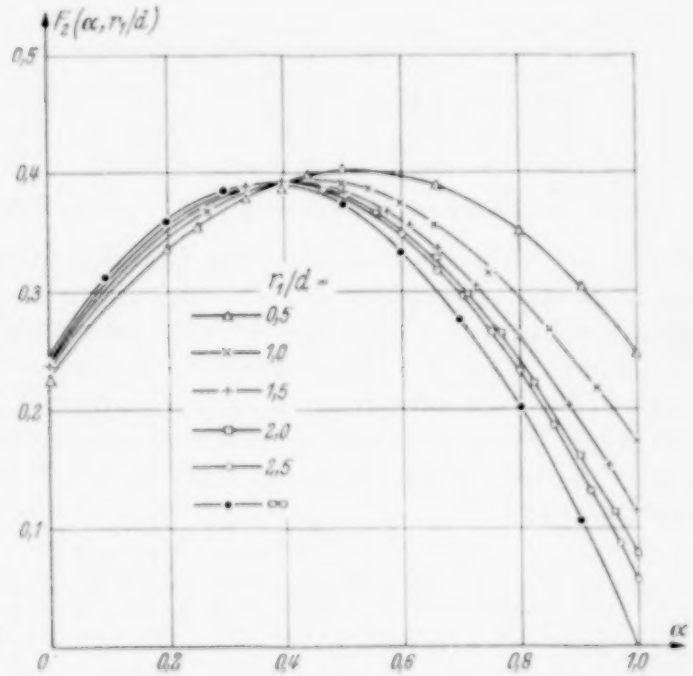


Abb. 17. Hilfsfunktion zur Berechnung der Winkeldrehung des Federendes.

Die Hilfsfunktionen F_1 und F_2 haben im Grenzfall $r_1/d \to \infty$ und für $\mu = 0{,}3$ die Werte[1] von Tabelle 5. Wir ergänzen die bisher für verschiedene r_1/d berechneten Werte dadurch, daß wir F_1 und F_2

[1] Eine Herleitung der Funktionen F_1 und F_2 wird an anderer Stelle gegeben werden, da die Mitteldruckfeder gleichzeitig auch als Grenzfall der dünnwandigen Niederdruckfedern betrachtet werden kann.

auch für $\varkappa = 0$ ermitteln. Dabei wird F_1 aus Formel (33) errechnet, während

$$F_2(0, r_1/d, \mu) = \frac{4}{15}(1-\mu^2)\,\frac{(r_1/d)^2 + (r_1/d) + 1/4}{(r_1/d)^2 + (r_1/d) + 1/3}$$

ist.

Durch Auftragung dieser und der aus den Tabellen 1 bis 4 umgerechneten Zahlenwerte sind die Kurventafeln Abb. 16 und 17 entstanden. Man erkennt, daß für die Berechnung der Winkeldrehung bzw. des Federweges der Grenzfall der Mitteldruckfeder eine recht brauchbare Näherung darstellt, solange das mittlere Achsenverhältnis $\varkappa < 0{,}5$ ist. Dagegen liegen die Kurven für die Berechnung der Beanspruchung erheblich auseinander.

6. Vergleich mit Messungen. Zum Vergleich mit der vorstehend entwickelten Theorie standen zwei Meßreihen an industriell gefertigten Röhrenfedern hoher Druckbereiche zur Verfügung. Die erste Meßreihe bezieht sich auf U-förmig gebogene Stahlrohrfedern, bei denen das freie Ende entsprechend Abb. 18 gerade verlängert ist. In Tabelle 6 sind Zahlenangaben für diese Federn zusammengestellt, und der errechnete ist mit dem gemessenen Federweg verglichen. Mit einer solchen Feder wurde auch der „Polarpunkt" P in der Weise gemessen, daß am Federende B ein feines Drahtnetz befestigt wurde. Bei periodischem Unterdrucksetzen der Feder bewegt sich auch das Drahtnetz, und mit einem auf einem Kreuztisch befestigten Mikroskop kann man diejenige Stelle abtasten, die bei der Bewegung in Ruhe bleibt. In Abb. 18 ist der so gemessene Wert neben dem gerechneten eingetragen. Die Übereinstimmung ist offenbar befriedigend. Vergleichsweise wurde dieser Versuch in der Weise wiederholt, daß das Drahtnetz an der Stelle A befestigt wurde. Tatsächlich wurde auch, wie es theoretisch zu erwarten ist, für P nahezu die gleiche Stelle gefunden (Abweichung etwa 1 mm).

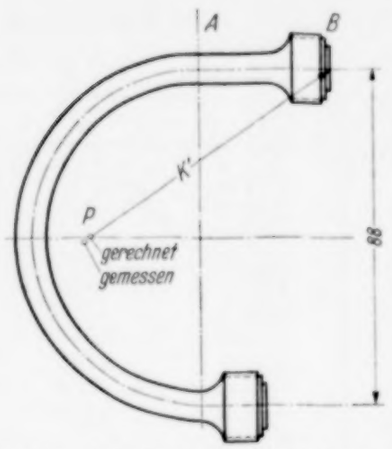


Abb. 18. Industriell hergestellte U-förmige Stahlrohrfedern.

Tabelle 6. *Meßwerte I. U-förmige Stahlrohrfedern.*
$R_0 = 44$ mm; $k' = 75$ mm; $\psi = \pi$; $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ kg/cm².

p kg/cm²	d mm	r_1 mm	l mm	σ_v [1] kg/mm²	$\frac{\Delta\psi}{\psi}\frac{E}{p}$ [2]	$\frac{\Delta\psi}{\psi}\cdot 10^3$	$s_{ger.}$ mm	$s_{gem.}$ mm
800	2	1,80	2,75	111	18,0	6,86	1,62	1,58
1000	2,25	1,85	2,65	113	11,8	5,62	1,32	1,65
1600	2,5	2,00	2,45	152	8,4	6,40	1,48	1,58
2000	2,75	2,10	2,25	155	5,8	5,52	1,30	1,44

[1] nach Kurvenbl. Abb. 6 berechnet. [2] nach Kurvenbl. Abb. 11 berechnet.

Die zweite Meßreihe bezieht sich auf Höchstdruckfedern größerer Abmessungen und einem wirksamen Windungswinkel $\psi = 250°$. Bei diesen Federn liegen die elastischen Beanspruchungswerte durchweg über der Fließgrenze des Materials. Es sind also ausgeprägte Fließzonen anzunehmen, die eine Autofrettage der Feder bewirken. Derartige Federn müssen stets mit einem Sicherheitsschutz (z. B. Schutzrohr oder Schutzgehäuse) versehen sein, weil nach einer gewissen Anzahl Lastwechsel mit einem Bruch gerechnet werden muß und bei dem hohen Flüssigkeitsdruck die Bruchstücke mit großer Gewalt weggeschleudert werden. In Tabelle 7 sind Zahlenangaben über diese Federn zusammengestellt.

Tabelle 7. *Meßwerte II. Höchstdruckröhrenfedern.*
$R_0 = 92$ mm; $k' = 120$ mm; $\psi = 250° = 4{,}36$; $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ kg/cm².

p kg/cm²	d mm	r_1 mm	l mm	σ_v kg/mm²	$\frac{\Delta\psi}{\psi}\frac{E}{p}$ [1]	$\frac{\Delta\psi}{\psi}\cdot 10^3$	$s_{ger.}$ mm	$s_{gem.}$ mm
6000	5,2	0,95	2,35	300	0,82	2,34	1,22	1,14
6000	7,0	1,65	2,35	278	0,88	2,52	1,32	0,98
6000	7,0	1,65	2,35	278	0,88	2,52	1,32	1,05
8000	4,85	0,78	1,77	354	0,57	2,17	1,13	0,84
8000	5,1	0,65	2,00	386	0,50	1,90	1,00	1,05
8000	6,4	0,85	2,49	383	0,54	2,05	1,07	1,00

[1] Die Werte für $\Delta\psi\, E/\psi\, p$ mußten extrapoliert werden, da die vorkommenden r_1/d noch unter den gerechneten liegen.

Bei einer Eintragung dieser Werte in Abb. 12 erkennt man, daß offenbar die Abmessungen keineswegs optimal gewählt worden sind. Bei einer weiteren Höchstdruckröhrenfeder, die bis 8500 kg/cm² belastbar ist, liegen besonders sorgfältige Messungen vor. Die Abmessungen waren hier wesentlich günstiger gewählt, so daß sich ein $\sigma_v = 250$ kg/mm² ergab und der gemessene Federweg lag 12% unter dem gerechneten.

Für einen Vergleich zwischen Theorie und Messung ist es übrigens wesentlich, die Stahlzusammensetzung bzw. die elastischen Materialeigenschaften zu kennen, weil bei hochlegierten Stählen, wie sie im Hochdruckgerätebau verwandt werden müssen, die Legierungsanteile einen wesentlichen Einfluß auf den Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl haben.

7. Sonderfall der Kreisrohrfeder. Bei dünnwandigen Röhrenfedern ergibt ein kreisförmiger Querschnitt keine Bewegung des Federendes. Bei sehr dickwandigen Federn kann dagegen auch ein Kreisrohr eine Bewegung des Federendes liefern, die mit den flachgeschlagenen Federn vergleichbar ist. Die Theorie der Kreisrohrfeder ist in den vorstehenden Berechnungen mit enthalten. Da hier jedoch eine geschlossene Lösung möglich ist, wollen wir diesen Fall noch einmal gesondert betrachten.

Für die Tangential- und Radialspannungen gelten hier die bekannten *Lamé*schen Formeln

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\varphi &= \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 + \frac{r_2^2}{r^2}\right) p\,, \\ \sigma_r &= \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

$$\sigma_x = \mu\,(\sigma_\varphi + \sigma_r) + \gamma\,.$$

Der Wert von γ wird daraus berechnet, daß

$$\int \sigma_x\, dF = \pi\, r_1^2\, p$$

sein muß, woraus

$$\gamma = (1 - 2\,\mu)\,\frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\,p$$

folgt, und für die Beanspruchung erhält man die Beziehung

$$\sigma_v = \sqrt{3}\,\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\,p\,.$$

Für die Dehnungen und Verschiebungen gilt

$$E\,\varepsilon_\varphi = E\,\frac{\Delta r}{r} = \sigma_\varphi - \mu\,(\sigma_r + \sigma_x)\,.$$

Die Radialverschiebung wird damit

$$\Delta r = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left[(1 - 2\,\mu)\,r + (1 + \mu)\,\frac{r_2^2}{r}\right]\frac{p}{E}\,. \tag{47}$$

Die Krümmungsänderung bestimmt man wie früher aus

$$\omega = \frac{\iint \Delta r\, r^2 \sin^2\varphi\, d\varphi\, dr}{\iint r^3 \sin^2\varphi\, d\varphi\, dr} = \frac{\int \Delta r\, r^2 dr}{\int r^3 dr}$$

mit dem Ergebnis

$$\omega = \frac{r_1^2}{r_2^4 - r_1^4}\left[3\,r_2^2 + (1 - 2\,\mu)\,r_1^2\right]\frac{p}{E}\,. \tag{48}$$

Nach Berücksichtigung der Exzentrizitätskorrektur (41) erhält man schließlich für die Krümmungsänderung

$$\omega_{Korr.} = \frac{r_1^2}{r_2^4 - r_1^4}\left[(2 + 2\,\mu)\,r_2^2 + (1 - 2\,\mu)\,r_1^2\right] \tag{48a}$$

und für die Winkeldrehung

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi_0} = -\,\omega_{Korr.} + \frac{\gamma}{E} = -\,(1 + 4\,\mu)\,\frac{r_1^2\, r_2^2}{r_2^4 - r_1^4}\,\frac{p}{E}\,. \tag{49}$$

Die durch (48), (48a) und (49) bestimmten Funktionen sind in Abb. 19 aufgetragen. Im gleichen Bild ist die Winkeldrehung für gegebene Beanspruchungsgrenzen eingetragen und die gestrichelte

Kurve läßt ferner erkennen, daß die korrigierten Werte für die Winkeldrehung etwa das 0,7-fache der nichtkorrigierten betragen.

Ich habe 1943 einen Versuch mit einer gewendelten Kapillarfeder von kreisförmigem Querschnitt bei Drücken bis 2000 kg/cm² durchgeführt. Der Außendurchmesser des Querschnittes betrug dabei 2,5 mm. Die Winkeldrehung wurde durch einen aufgesetzten Spiegel gemessen. Ein weiterer Versuch wurde im Juni 1945 mit einer für 8000 kg/cm² bestimmten dickwandigen Kreisrohrfeder großer Abmessungen unternommen. Die Versuchsunterlagen sind verloren gegangen. Doch betrugen nach meiner Erinnerung die gemessenen Winkeldrehungen etwa das 0,55-fache der nichtkorrigierten gerechneten (die Korrekturen waren damals nicht bekannt). Da die hier angegebenen Korrekturen den Ausgangswert nur auf etwa das 0,7-fache erniedrigen, bleibt noch eine kleine Differenz zwischen Theorie und Messung.

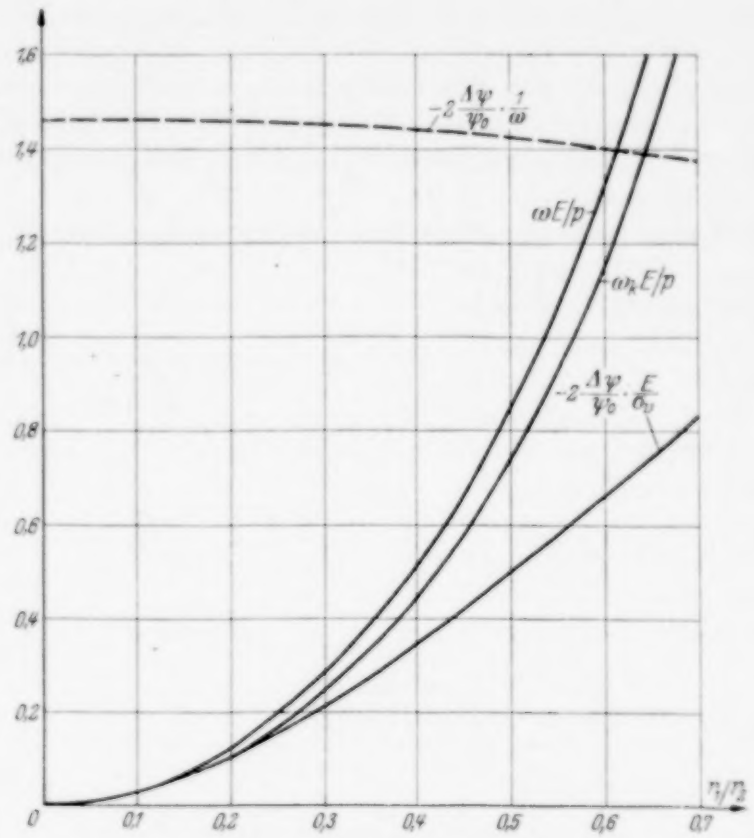


Abb. 19. Krümmungsänderung der Kreisrohrfeder ohne und mit der Exzentrizitätskorrektur.

Im Jahre 1945 habe ich (in einer Patentanmeldung) den Vorschlag gemacht, den Einfluß der exzentrischen Verlagerung beim Herstellungsvorgang der Feder dadurch zu beseitigen, daß man als Ausgangsmaterial ein Rohr verwendet, das im entgegengesetzten Sinne ausmittig gebohrt ist. Noch günstiger ist die Wirkung, wenn man die Gegenexzentrizität größer wählt als zum Ausgleich erforderlich ist. Man verbindet so die Wirkung des Hochdruck-*Bourdon*rohres mit der des ausmittig gebohrten Meßrohres, für das ich in einer früheren Arbeit[1] Berechnungsgrundlagen entwickelt habe.

8. Zusammenfassung. Zur Messung hoher Drücke im Bereich von 100 bis 10000 at werden in der Technik vielfach dickwandige Röhrenfedern nach Art des *Bourdon*manometers benutzt. Diese Federn werden durch Flachschlagen eines Kreisrohres und anschließendes Krümmen hergestellt. Die Theorie derartiger Hochdruckfedern wird auf einen ebenen Formänderungszustand zurückgeführt und die Spannungen und Deformationen werden berechnet, wobei die Querschnittsform durch ein rechteckiges Mittelstück und zwei Randbögen (Flachbogenquerschnitt) idealisiert wird. Als Sonderfall wird auch der kreisförmige Querschnitt behandelt. Bei kreisförmiger oder kreisähnlicher Querschnittsform werden verschiedene Korrekturgrößen von wesentlichem Einfluß, die ebenfalls abgeleitet werden. Abschließend wird auch das Bewegungsgesetz solcher Meßfedern untersucht.

Die hier dargelegte Theorie der Hochdruckfeder habe ich mit weitergehenden Vereinfachungen und ohne die Exzentrizitäts- und Längungskorrektur bereits 1943 entwickelt. Ergebnisse wurden auszugsweise in einem Aufsatz in „Die Technik" 3 (1948) S. 23—30 wiedergegeben. In der vorliegenden Neufassung sind alle Tabellen neu berechnet worden, wobei ich von Frau *Otto* in Göttingen, wesentlich unterstützt wurde.

(Eingegangen am 3. August 1955.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *W. Wuest*, Göttingen (Hann.), Böttingerstr. 6/8.

[1] *W. Wuest*, Ing.-Arch. 19 (1951), S. 12.

Kritische Drehzahlen gewisser Rotorformen unter Berücksichtigung der Kreiselwirkung*

Von L. Fehrle

1. Einleitung. Die Berechnung der kritischen Drehzahlen von endseitig zweifach kugelig gelagerten Wellen mit konstanter Biegesteifigkeit, die ganz oder teilweise kontinuierlich mit Scheiben von linear veränderlichem Halbmesser besetzt sind, führt auf ein technisches Eigenwertproblem, dessen Auflösung im allgemeinen unter Verwendung von Näherungsmethoden erfolgt, da die strenge Lösung, soweit ihre Existenz mathematisch gesichert ist, meist nur durch umfangreiche Rechenarbeit zu gewinnen ist.

Ausgehend von dem durch eine Differentialgleichung einschließlich Rand- und Übergangsbedingungen gegebenen Eigenwertproblem — der Eigenwert ist proportional dem Quadrat der kritischen Drehschnelle — hat *K. Karas*[1] die angenäherte Auflösung mit der Methode von *W. Ritz*[2] durchgeführt. Diese Methode liefert, was sich unter bestimmten Voraussetzungen exakt beweisen läßt, obere Schranken für die positiven, untere Schranken für die negativen Eigenwerte. Von praktischer Bedeutung sind lediglich die positiven Eigenwerte; das Auftreten negativer Eigenwerte bei berücksichtigter Kreiselwirkung im Falle synchroner Präzession im Gleichlauf besagt, daß die Kreiselwirkung der Scheiben für $\omega > \varpi$ (ϖ entspricht dem größten positiven Eigenwert) ein kritisches Verhalten der Welle verhindert.

In der vorliegenden Arbeit erfolgt die angenäherte Berechnung der kritischen Drehzahlen unter Berücksichtigung der Kreiselwirkung mit einer Methode, die, anknüpfend an ein von *R. Grammel*[3] entwickeltes Verfahren, die Äquivalenz zwischen dem durch die Differentialgleichung samt Rand- und Übergangsbedingungen und dem durch eine Integrodifferentialgleichung gegebenen Eigenwertproblem benutzt. Das Verfahren von *R. Grammel*, mit welchem sich die kritischen Drehzahlen bei unberücksichtigter Kreiselwirkung berechnen lassen, liefert ebenfalls obere Schranken; unter gewissen Voraussetzungen ist streng beweisbar, daß diese genauer sind als die mit dem gleichen Näherungsansatz (s. u.) errechneten entsprechenden *Ritz*schen Lösungen. Diese charakteristische Eigenschaft der *Grammel*schen Methode tritt in ihrer hier durchgeführten Verallgemeinerung auch bei berücksichtigter Kreiselwirkung noch im Falle synchroner Präzession im Gegenlauf auf. Bei synchroner Präzession im Gleichlauf allerdings gelangt man zu Näherungen, die z.T. oberhalb, z.T. unterhalb der strengen Lösungen liegen können.

Ausgangspunkt für die Berechnung der kritischen Drehzahlen, deren Ursache die nie ganz zu vermeidende exzentrische Lage der Scheibenschwerpunkte ist, ist das nachstehende Äquivalenzprinzip[4]:

„Man berechnet die kritischen Drehzahlen als diejenigen, mit denen die Welle in ausgelenktem Zustand stationär um die Ruhelage umlaufen könnte, wenn die Scheibenschwerpunkte genau mit der Wellenachse zusammenfielen."

Die mathematische Erfassung des durch diese Vorschrift charakterisierten Problems kann auf verschiedene Weise erfolgen. Die Rotationssymmetrie des stationären Umlaufs der ausgelenkten Welle (die Durchsenkung infolge des Eigengewichtes des Rotors bleibt unberücksichtigt) legt es nahe, sich der Methoden der Statik zu bedienen und die Wellenauslenkung im kritischen Zustand als eine Folge gewisser äußerer Kräfte anzusehen. Diese Überlegungen führen auf eine Integral- bzw. Integrodifferentialgleichung. Eine andere Ansatzmöglichkeit ist durch das *Hamilton*sche Prinzip gegeben; benötigt werden hierzu potentielle und kinetische Energie des aus Welle und Scheiben bestehenden Systems beim Rotieren mit der kritischen Drehschnelle. Dieser Weg führt auf das durch eine Differentialgleichung samt Rand- und Übergangsbedingungen definierte Eigenwertproblem.

* Auszug aus der Frankfurter Dissertation. 1. Referent Prof. Dr.-Ing. K. *Karas*, 2. Referent Prof. Dr. *R. Moufang*.

[1] *K. Karas*, Die kritischen Drehzahlen wichtiger Rotorformen. Wien 1935.

[2] *W. Ritz*, Crelles Journ. 135 (1909), S. 1.

[3] *R. Grammel*, Ing.-Arch. 10 (1939), S. 35.

[4] *R. Grammel*, Neuere Untersuchungen über kritische Zustände rasch umlaufender Wellen. Ergebn. d. exakten Naturwissensch., Bd. 1, S. 92. Berlin 1922.

Als äußere Kräfte treten in erster Linie Fliehkräfte und Kreiselmomente in Erscheinung, über die kurz folgendes gesagt sei:

a) Fliehkraft: Bezeichnet man mit $y(x)$ die wegen der Rotationssymmetrie des Problems als ebene Kurve dargestellte Wellenauslenkung im kritischen Zustand, mit ω die kritische Drehschnelle, so tritt an einer im Punkt x_0 befindlichen Scheibe der Masse m eine Fliehkraft $F = m\,y(x_0)\,\omega^2$ auf.

b) Kreiselmoment: Im ausgelenkten Zustand hat im allgemeinen jede Scheibe die Ebene, in der sie im Ruhezustand lag, verlassen und führt eine erzwungene reguläre Präzessionsbewegung aus, deren Kreiselmoment, mit dem die Scheibe beim Umlaufen auf die Welle wirkt, zu bestimmen ist. Unter der Voraussetzung, daß die Scheibendicke gegenüber den anderen Scheibenabmessungen vernachlässigt werden kann und die Wellenauslenkung klein ist, liefert die Kreiseltheorie für die hier allein wichtigen Fälle der synchronen Präzession im Gleich- und Gegenlauf die Kreiselmomente

$$K^s_{Gl} = \Theta_d\,y'(x_0)\,\omega^2, \quad K^s_{Gn} = -3\,\Theta_d\,y'(x_0)\,\omega^2 = -3\,K^s_{Gl}$$

(s = synchron, Gl = Gleichlauf, Gn = Gegenlauf). In diesen Gleichungen, die für eine in x_0 befindliche Scheibe gelten, bedeutet Θ_d das äquatoriale Massenträgheitsmoment der Scheibe und $y'(x)$ die erste Ableitung der Auslenkungsfunktion.

Geht man zu einer kontinuierlichen Scheibenverteilung über, so wirken auf ein mit Scheiben besetztes Wellenelement der Länge dx die Fliehkraft $dF = \mu\,\pi\,r^2(x)\,y(x)\omega^2 dx$ und das Kreiselmoment $dK^s_{Gl} = \frac{1}{4}\,\mu\,\pi\,r^4(x)\,y'(x)\,\omega^2\,dx$ bzw. $dK^s_{Gn} = -\frac{3}{4}\,\mu\,\pi\,r^4(x)\,y'(x)\,\omega^2\,dx$, wobei μ die Masse des Scheibenmaterials pro Volumeneinheit ist. Dabei wird angenommen, daß sich die auf der Welle sitzenden Scheiben trotz dichter Aneinanderreihung nirgends berühren mögen.

2. Die Integrodifferentialgleichung der zweifach kugelig gelagerten Welle. Gegeben sei eine an beiden Enden kugelig gelagerte Welle der Länge l mit einer durch $r = r(x)$ in $0 \leqq x \leqq l$ definierten kontinuierlichen Scheibenverteilung. Vorausgesetzt wird:

a) die Biegesteifigkeit der Welle, EJ, ist konstant;

b) die Masse der Welle ist vernachlässigbar gegenüber der Scheibenmasse.

Zur Herleitung der Integrodifferentialgleichung[1] wird die gemäß Abb. 1 in $x = t$ durch eine Fliehkraft $dF = \mu\,\pi\,r^2(t)\,y(t)\omega^2\,dt$ und ein Kreiselmoment $dK^s_{Gl} = \frac{1}{4}\,\mu\,\pi\,r^4(t)\,y'(t)\,\omega^2\,dt$ belastete Welle betrachtet. Aufzusuchen sind die Auslenkungsfunktionen $y_1(x,t)$ in $0 \leqq x \leqq t$ und $y_2(x,t)$ in $t \leqq x \leqq l$. In den Lagern ist die Wellenauslenkung gleich Null, d.h. y_1 und y_2 müssen den geometrischen Randbedingungen

$$y_1(0,t) = y_2(l,t) = 0 \qquad (1\,a)$$

genügen. Ferner verschwinden dort wegen der vorausgesetzten freien Lagerung die Biegemomente, was zum Ausdruck kommt durch die dynamischen Randbedingungen

$$y_1''(0,t) = y_2''(l,t) = 0. \qquad (1\,b)$$

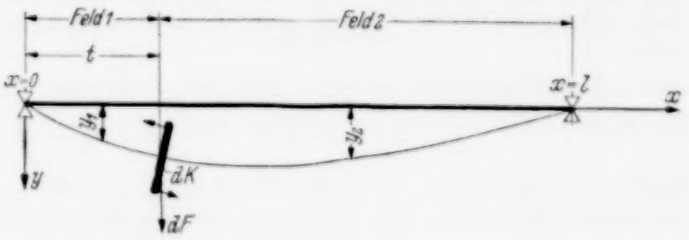


Abb. 1.

Zur Bestimmung von y_1 und y_2 ersetzt man vorübergehend dF und dK^s_{Gl} durch die endlichen Größen F und K und berechnet die Biegemomente $M_1(x)$ und $M_2(x)$ für die Felder 1 und 2. Nach kurzer Rechnung ergibt sich

$$M_1(x) = \frac{F}{l}\,(l-t)\,x + \frac{K}{l}\,x, \qquad (2\,a)$$

$$M_2(x) = \frac{F}{l}\,(l-x)\,t - \frac{K}{l}\,(l-x). \qquad (2\,b)$$

Mit $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EJ}$ folgt aus (2a) und (2b)

$$\frac{d^2y_1(x,t)}{dx^2} = -\frac{F}{EJl}\,(l-t)\,x - \frac{K}{EJl}\,x, \qquad (3\,a)$$

$$\frac{d^2y_2(x,t)}{dx^2} = -\frac{F}{EJl}\,t\,(l-x) + \frac{K}{EJl}\,(l-x). \qquad (3\,b)$$

[1]) Siehe Fußnote 1 von S. 111.

Die Gleichungen (3a) und (3b) erfüllen die Bedingungen (1b). Durch zweifache Integration von (3a) und (3b) nach x erhält man die gesuchten Funktionen y_1 und y_2. Die dabei auftretenden vier Integrationskonstanten sind so zu bestimmen, daß (1a) erfüllt wird, ferner $y_1(t,t) = y_2(t,t)$ und $y_1'(t,t) = y_2'(t,t)$ ist; die beiden letzten Bedingungen sichern den sprung- und knicklosen Verlauf der Auslenkungsfunktionen in $x = t$. Nach Ausführung dieser Rechnungen erhält man

$$y_1(x,t) = \frac{F x}{6 E J l}(l-t)\,(2 l t - t^2 - x^2) - \frac{K}{6 E J l}(x^3 + 2 x l^2 + 3 x t^2 - 6 x t l),$$

$$y_2(x,t) = \frac{F t}{6 E J l}(l-x)\,(2 l x - x^2 - t^2) - \frac{K}{6 E J l}(x^3 - 3 x^2 l + 3 x t^2 + 2 x l^2 - 3 t^2 l).$$

Führt man wieder statt F und K die Elementarbelastungen dF und dK_{Gl}^{s} ein und berücksichtigt, daß t alle Werte zwischen 0 und l annehmen kann, so findet man durch Superposition aller Einzelauslenkungen

$$\left.\begin{aligned} y(x) = \mu\,\pi\,\omega^2 \Bigg[&\int_0^x \frac{1}{6 E J l}(l-x)\,t\,(2 l x - x^2 - t^2)\,r^2(t)\,y(t)\,dt \\ &+ \int_x^l \frac{1}{6 E J l}(l-t)\,x\,(2 l t - t^2 - x^2)\,r^2(t)\,y(t)\,dt \Bigg] \\ - \mu\,\pi\,\omega^2 \Bigg[&\int_0^x \frac{1}{24 E J l}(x^3 - 3 x^2 l + 3 x t^2 + 2 x l^2 - 3 t^2 l)\,r^4(t)\,y'(t)\,dt \\ &+ \int_x^l \frac{1}{24 E J l}(x^3 + 2 x l^2 + 3 x t^2 - 6 x t l)\,r^4(t)\,y'(t)\,dt \Bigg]. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Mit $$x = l\xi, \quad y = l\eta, \quad t = l\tau, \quad r = l\varrho, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{l}\frac{d^2\eta}{d\xi^2}, \quad u = \frac{\mu\,\pi\,\omega^2 l^6}{EJ} \quad (5)$$

erfolgt der Übergang zu dimensionslosen Veränderlichen; damit geht (4) über in

$$\left.\begin{aligned} \eta(\xi) = u \Bigg[&\int_0^\xi \frac{1}{6}(1-\xi)\,\tau\,(2\xi - \xi^2 - \tau^2)\,\varrho^2(\tau)\,\eta(\tau)\,d\tau \\ &+ \int_\xi^1 \frac{1}{6}(1-\tau)\,\xi\,(2\tau - \tau^2 - \xi^2)\,\varrho^2(\tau)\,\eta(\tau)\,d\tau \\ - &\int_0^\xi \frac{1}{24}(\xi^3 - 3\xi^2 + 3\xi\tau^2 + 2\xi - 3\tau^2)\,\varrho^4(\tau)\,\eta'(\tau)\,d\tau \\ - &\int_\xi^1 \frac{1}{24}(\xi^3 + 2\xi + 3\xi\tau^2 - 6\xi\tau)\,\varrho^4(\tau)\,\eta'(\tau)\,d\tau \Bigg]. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Nach Einführung der Kerne $K(\xi,\tau)$ und $K_1(\xi,\tau)$ mit

$$\left.\begin{aligned} K(\xi,\tau) &= \frac{1}{6}(1-\tau)\,\xi\,(2\tau - \tau^2 - \xi^3) = K_{01}(\xi,\tau) && \text{für } \xi \leq \tau, \\ &= \frac{1}{6}(1-\xi)\,\tau\,(2\xi - \xi^2 - \tau^2) = K_{02}(\xi,\tau) && \text{für } \xi \geq \tau; \\ K_1(\xi,\tau) &= \frac{1}{24}(\xi^3 + 2\xi + 3\xi\tau^2 - 6\xi\tau) && \text{für } \xi \leq \tau, \\ &= \frac{1}{24}(\xi^3 - 3\xi^2 + 3\xi\tau^2 + 2\xi - 3\tau^2) && \text{für } \xi \geq \tau \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

folgt aus (6)

$$\eta(\xi) = u \left[\int_0^1 K(\xi,\tau)\,\varrho^2(\tau)\,\eta(\tau)\,d\tau - \int_0^1 K_1(\xi,\tau)\,\varrho^4(\tau)\,\eta'(\tau)\,d\tau \right]. \quad (8a)$$

Dies ist eine lineare homogene Integrodifferentialgleichung mit dem symmetrischen Kern $K(\xi,\tau)$ und dem unsymmetrischen Kern $K_1(\xi,\tau)$. Der Kern $K(\xi,\tau)$ wird auch „Musterkern" genannt; er gibt die Auslenkung an, die an einer Welle von der Biegesteifigkeit 1 und der Länge 1 durch eine an der Stelle $\tau\ (0\leqq\tau\leqq 1)$ senkrecht zur Ruhelage der Welle wirkenden Kraft der Größe 1 hervorgerufen wird. Der erste Term in (8a) stellt den von der Fliehkraftbelastung herrührenden Anteil der Auslenkung dar, dem sich die von den Kreiselmomenten verursachte zusätzliche Auslenkung (zweiter Term) überlagert. Aus der für synchrone Präzession im Gleichlauf abgeleiteten Gleichung (8a) erhält man sofort die entsprechende Gleichung für synchrone Präzession im Gegenlauf, wenn man wegen $K^s_{Gn} = -3\,K^s_{Gl}$ den zweiten Term von (8a) mit -3 multipliziert:

$$\eta_l(\xi) = u\left[\int_0^1 K(\xi,\tau)\,\varrho^2(\tau)\,\eta_l(\tau)\,d\tau + 3\int_0^1 K_1(\xi,\tau)\,\varrho^4(\tau)\,\eta_l'(\tau)\,d\tau\right]. \tag{8b}$$

Ohne Kreiselwirkung ist $K_1(\xi,\tau) = 0$, also

$$\eta_l(\xi) = u\int_0^1 K(\xi,\tau)\,\varrho^2(\tau)\,\eta_l(\tau)\,d\tau. \tag{8}$$

Zwischen $K(\xi,\tau)$ und $K_1(\xi,\tau)$ bestehen verschiedene Beziehungen[1]; hier sei nur eine erwähnt, welche die Elimination des Kernes $K_1(\xi,\tau)$ aus (8a) und (8b) ermöglicht. Es ist

$$-\frac{\partial K(\xi,\tau)}{\partial\tau} = 4\,K_1(\xi,\tau) = \begin{cases}\frac{1}{6}\,(\xi^3 + 2\,\xi + 3\,\xi\tau^2 - 6\,\xi\tau)\\ \frac{1}{6}\,(\xi^3 - 3\,\xi^2 + 3\,\xi\tau^2 + 2\,\xi - 3\,\tau^2)\end{cases}\ \text{für}\ \begin{cases}\xi\leqq\tau\\ \xi>\tau.\end{cases} \tag{9}$$

Damit in (8a) eingehend gelangt man zu

$$\eta_l(\xi) = u\left[\int_0^1 K(\xi,\tau)\,\varrho^2(\tau)\,\eta_l(\tau)\,d\tau - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\partial K(\xi,\tau)}{\partial\tau}\,\varrho^4(\tau)\,\eta_l'(\tau)\,d\tau\right]$$

und nach Ausführung einer partiellen Integration weiter zu

$$\left.\begin{aligned}\eta_l(\xi) &= u\left[\int_0^1 K(\xi,\tau)\,\varrho^2(\tau)\,\eta_l(\tau)\,d\tau - \frac{1}{4}\,K(\xi,\tau)\,\varrho^4(\tau)\,\eta_l'(\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=1} + \frac{1}{4}\int_0^1 K(\xi,\tau)\,\frac{d}{d\tau}\,(\varrho^4(\tau)\,\eta_l'(\tau))\,d\tau\right]\\ &= u\left[\int_0^1 K(\xi,\tau)\left|\varrho^2(\tau)\,\eta_l(\tau) + \frac{1}{4}\,\frac{d}{d\tau}\,(\varrho^4(\tau)\,\eta_l'(\tau))\right|d\tau - \frac{1}{4}\,K(\xi,\tau)\,\varrho^4(\tau)\,\eta_l'(\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=1}\right].\end{aligned}\right\} \tag{10a}$$

Das Glied $-\frac{1}{4}\,K(\xi,\tau)\,\varrho^4(\tau)\,\eta_l'(\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=1}$ verschwindet im allgemeinen nicht; ausschlaggebend für die einzusetzenden Zahlenwerte der oberen und unteren Grenze ist der Definitionsbereich von $\varrho(\xi)$, d.h. Anfangs- und Endpunkte der Intervalle, in welchen $\varrho(\xi)$ nicht identisch Null ist.

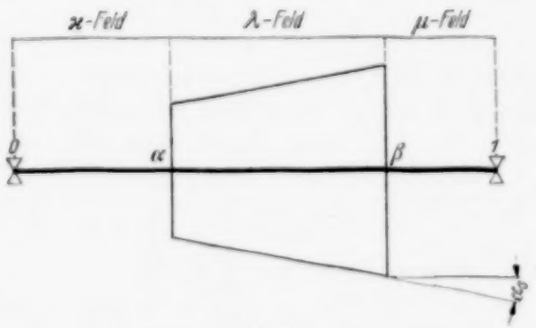


Abb. 2.

Im allgemeinen liegt der Funktion $\varrho(\xi)$ ein lineares Bildungsgesetz zugrunde (Abb. 2), das sich mit

$$\operatorname{tg}\varkappa_0 = i \quad \text{durch} \quad \varrho(\xi) = \varrho_0 + i\,\xi\ (\varkappa\leqq\xi\leqq\beta)$$

ausdrücken läßt.

Gleichung (10a) macht für den in Abb. 2 dargestellten Rotor unter Beachtung der Bedeutung des Kernes $K(\xi,\tau)$ folgende Aussage:

Die Auslenkung $\eta_l(\xi)$ stellt sich ein als Folge einer kontinuierlichen Belastung

$$q(\xi) = u\left[\varrho^2(\xi)\,\eta_l(\xi) + \frac{1}{4}\,\frac{d}{d\xi}\,(\varrho^4(\xi)\,\eta_l'(\xi))\right] \quad \text{in} \quad \varkappa\leqq\xi\leqq\beta$$

[1] Siehe Fußnote 1 von S. 111.

und zweier Kräfte (senkrecht zur Ruhelage der Welle gerichtet)

$$P_\alpha = \frac{1}{4}\, u\, \varrho^4(\alpha)\, \eta'(\alpha) \quad \text{in } \xi = \alpha\,, \qquad P_\beta = -\frac{1}{4}\, u\, \varrho^4(\beta)\, \eta'(\beta) \quad \text{in } \xi = \beta\,.$$

In diesem speziellen Fall ist also

$$-\frac{1}{4}\, K(\xi,\tau)\, \varrho^4(\tau)\, \eta'(\tau)\,\Big|_{\tau=0}^{\tau=1} = -\frac{1}{4}\, K(\xi,\tau)\, \varrho^4(\tau)\, \eta'(\tau)\,\Big|_{\tau=\alpha}^{\tau=\beta}.$$

Zwischen P_α, P_β und dem Gewicht G der in $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$ kontinuierlich verteilten Last $\frac{1}{4}\, u\big(\varrho^4(\xi)\, \eta'(\xi)\big)'$ besteht folgende Beziehung:

$$G = \frac{1}{4}\, u \int_\alpha^\beta \big(\varrho^4(\xi)\, \eta'(\xi)\big)'\, d\xi = \frac{1}{4}\, u\, \varrho^4(\beta)\, \eta'(\beta) - \frac{1}{4}\, u\, \varrho^4(\alpha)\, \eta'(\alpha) = -\,(P_\beta + P_\alpha),$$

d.h. die Summe der Vertikalkomponenten der Kreiselmomentbelastung ist Null, was ja von vornherein nicht anders zu erwarten ist.

Mit (9) folgt aus (8b) analog

$$\eta(\xi) = u\left[\int_0^1 K(\xi,\tau)\left|\varrho^2(\tau)\, \eta(\tau) - \frac{3}{4}\, \frac{d}{d\tau}\left(\varrho^4(\tau)\, \eta'(\tau)\right)\right| d\tau + \frac{3}{4}\, K(\xi,\tau)\, \varrho^4(\tau)\, \eta'(\tau)\,\Big|_{\tau=0}^{\tau=1}\right]. \tag{10b}$$

Für einen Rotor gemäß Abb. 2 gilt jetzt

$$q(\xi) = u\left[\varrho^2(\xi)\, \eta(\xi) - \frac{3}{4}\, \frac{d}{d\xi}\left(\varrho^4(\xi)\, \eta'(\xi)\right)\right] \qquad \text{in } \alpha \leqq \xi \leqq \beta\,,$$

$$P_\alpha = -\frac{3}{4}\, u\, \varrho^4(\alpha)\, \eta'(\alpha) \quad \text{in } \xi = \alpha\,, \qquad P_\beta = \frac{3}{4}\, u\, \varrho^4(\beta)\, \eta'(\beta) \quad \text{in } \xi = \beta\,.$$

3. Variationsproblem und Differentialgleichung. Ausgehend vom *Hamilton*schen Prinzip

$$\delta H = \delta \int_{t_0}^{t_1} (V - L)\, dt = 0 \qquad (t = \text{Zeit})\,, \tag{11}$$

wobei V die potentielle, L die kinetische Energie des betrachteten Systems ist, gelangt man zu dem durch eine Differentialgleichung samt Rand- und Übergangsbedingungen definierten Eigenwertproblem.

Für die im kritischen Zustand rotierende Welle ist im Falle synchroner Präzession im Gleichlauf

$$L = \frac{1}{2}\, \mu\, \pi\, \omega^2 \int_0^l r^2(x)\, y^2(x)\, dx + \frac{1}{2}\, \mu\, \pi\, \omega^2 \int_0^l \left(\frac{1}{2}\, r^4(x) - \frac{1}{4}\, r^4(x)\, y'^2(x)\right) dx\,, \tag{12}$$

$$V = \frac{1}{2}\, EJ \int_0^l y''^2(x)\, dx\,. \tag{13}$$

Mit (12) und (13) folgt aus (11) nach Division durch $\frac{1}{2}$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left| \int_0^l \left[EJ\, y''^2(x) - \mu\, \pi\, \omega^2 \left(r^2(x)\, y^2(x) + \frac{1}{2}\, r^4(x) - \frac{1}{4}\, r^4(x)\, y'^2(x)\right)\right] dx \right| dt = 0\,. \tag{14}$$

Da $y(x)$ nebst allen Ableitungen nach x nicht von der Zeit abhängt, ferner der Term $-\mu\, \pi\, \omega^2\, \frac{1}{2}\, r^4(x)$ die Variation nicht beeinflußt, reduziert sich (14) auf

$$\delta \int_0^l \left[EJ\, y''^2(x) - \mu\, \pi\, \omega^2 \left(r^2(x)\, y^2(x) - \frac{1}{4}\, r^4(x)\, y'^2(x)\right)\right] dx = 0\,. \tag{15}$$

Vermöge der Transformationsgleichungen (5) geht (15) über in

$$\delta \int_0^1 \left(\eta''^2 + \frac{1}{4}\, u\, \varrho^4\, \eta'^2 - u\, \varrho^2\, \eta^2\right) d\xi = 0\,. \tag{16a}$$

Für synchrone Präzession im Gegenlauf und unberücksichtigte Kreiselwirkung erhält man entsprechend

$$\delta \int_0^1 \left(\eta''^2 - \frac{3}{4} u \varrho^4 \eta'^2 - u \varrho^2 \eta^2 \right) d\xi = 0, \tag{16b}$$

$$\delta \int_0^1 (\eta''^2 - u \varrho^2 \eta^2)\, d\xi = 0. \tag{16}$$

Eine Auflösung dieser Variationsprobleme kann über die entsprechenden *Euler-Lagrange*schen Differentialgleichungen

$$\eta^{(4)} - u \varrho^2 \eta = 0, \tag{17}$$

$$\eta^{(4)} - \frac{1}{4} u (\varrho^4 \eta')' - u \varrho^2 \eta = 0, \tag{17a}$$

$$\eta^{(4)} + \frac{3}{4} u (\varrho^4 \eta')' - u \varrho^2 \eta = 0 \tag{17b}$$

erfolgen.

Die Weiterführung der Überlegungen erfolgt für den speziellen Fall eines Rotors gemäß Abb. 2, für welchen $\varrho_\varkappa = \varrho_\mu \equiv 0$, $\varrho_\lambda \not\equiv 0$ gilt. An die Stelle der Gleichung (17a) treten für synchrone Präzession im Gleichlauf die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \eta_j^{(4)} &= 0 \ (j = \varkappa, \mu), \\ \eta_\lambda^{(4)} - \frac{1}{4} u (\varrho_\lambda^4 \eta_\lambda')' - u \varrho_\lambda^3 \eta_\lambda &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

da in jedem der drei Felder ein anderes Bildungsgesetz für ϱ vorliegt, folglich die Auslenkungsfunktion η in die drei Komponenten $\eta_\varkappa$ in $0 \leqq \xi \leqq \alpha$, η_λ in $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$ und η_μ in $\beta \leqq \xi \leqq 1$ zerfällt.

Die Lösungen $\eta_\varkappa$ und η_μ von (18) haben den bereits bekannten Bedingungen für die Lager

$$\eta_\varkappa(0) = \eta_\varkappa''(0) = \eta_\mu(1) = \eta_\mu''(1) = 0 \tag{19}$$

zu genügen. Ferner sind $\eta_\varkappa$ und η_λ bzw. η_λ und η_μ an der Stelle α bzw. β durch je vier Übergangsbedingungen miteinander verknüpft. Je zwei Übergangsbedingungen für α und β ergeben sich aus der Tatsache, daß die Auslenkungsfunktion überall sprung- und knicklos verläuft, die Funktionen $\eta_\varkappa$, η_λ und η_μ also die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \eta_\varkappa(\alpha) &= \eta_\lambda(\alpha), & \eta_\lambda(\beta) &= \eta_\mu(\beta), \\ \eta_\varkappa'(\alpha) &= \eta_\lambda'(\alpha), & \eta_\lambda'(\beta) &= \eta_\mu'(\beta) \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

erfüllen müssen. Die Gleichungen (19) und (20) gelten auch für synchrone Präzession im Gegenlauf und unberücksichtigte Kreiselwirkung. Die restlichen Übergangsbedingungen lassen sich aus den entsprechenden Variationsgleichungen gewinnen. Dies erfolgt hier für einen Rotor gemäß Abb. 2 im Falle synchroner Präzession im Gleichlauf. Gleichung (16a) führt zu

$$\delta \left[\int_0^\alpha \eta_\varkappa''^2\, d\xi + \int_\alpha^\beta \left(\eta_\lambda''^2 + \frac{1}{4} u \varrho_\lambda^4 \eta_\lambda'^2 - u \varrho_\lambda^3 \eta_\lambda^2 \right) d\xi + \int_\beta^1 \eta_\mu''^2\, d\xi \right] = 0. \tag{21}$$

Nach Ausführung der Variation und Division durch 2 folgt hieraus

$$\int_0^\alpha \eta_\varkappa'' \delta\eta_\varkappa''\, d\xi + \int_\alpha^\beta \left(\eta_\lambda'' \delta\eta_\lambda'' + \frac{1}{4} u \varrho_\lambda^4 \eta_\lambda' \delta\eta_\lambda' - u \varrho_\lambda^3 \eta_\lambda \delta\eta_\lambda \right) d\xi + \int_\beta^1 \eta_\mu'' \delta\eta_\mu''\, d\xi = 0. \tag{22}$$

Durch partielle Integration lassen sich folgende Glieder dieser Gleichung umformen:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\alpha \eta_\varkappa'' \delta\eta_\varkappa''\, d\xi &= \eta_\varkappa'' \delta\eta_\varkappa' \Big|_0^\alpha - \eta_\varkappa''' \delta\eta_\varkappa \Big|_0^\alpha + \int_0^\alpha \eta_\varkappa^{(4)} \delta\eta_\varkappa\, d\xi, \\ \int_\alpha^\beta \eta_\lambda'' \delta\eta_\lambda''\, d\xi &= \eta_\lambda'' \delta\eta_\lambda' \Big|_\alpha^\beta - \eta_\lambda''' \delta\eta_\lambda \Big|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \eta_\lambda^{(4)} \delta\eta_\lambda\, d\xi, \\ \int_\beta^1 \eta_\mu'' \delta\eta_\mu''\, d\xi &= \eta_\mu'' \delta\eta_\mu' \Big|_\beta^1 - \eta_\mu''' \delta\eta_\mu \Big|_\beta^1 + \int_\beta^1 \eta_\mu^{(4)} \delta\eta_\mu\, d\xi, \\ \frac{1}{4} u \int_\alpha^\beta \varrho_\lambda^4 \eta_\lambda' \delta\eta_\lambda'\, d\xi &= \frac{1}{4} u \varrho_\lambda^4 \eta_\lambda' \delta\eta_\lambda \Big|_\alpha^\beta - \frac{1}{4} u \int_\alpha^\beta (\varrho_\lambda^4 \eta_\lambda')' \delta\eta_\lambda\, d\xi. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Berücksichtigt man hierbei die Rand- und Übergangsbedingungen (19) und (20) und bedenkt, daß diese weiterhin in jeder beliebigen Nachbarlage nur dann erfüllt bleiben, wenn die Variationen $\delta\eta_j$, $\delta\eta_j'(j=\varkappa,\lambda,\mu)$ den Bedingungen

$$\begin{aligned}
&\delta\eta_\varkappa(0)=\delta\eta_\mu(1)=0,\\
&\delta\eta_\varkappa(\alpha)=\delta\eta_\lambda(\alpha)\equiv\delta\eta(\alpha), \qquad \delta\eta_\lambda(\beta)=\delta\eta_\mu(\beta)\equiv\delta\eta(\beta),\\
&\delta\eta_\varkappa'(\alpha)=\delta\eta_\lambda'(\alpha)\equiv\delta\eta'(\alpha), \qquad \delta\eta_\lambda'(\beta)=\delta\eta_\mu'(\beta)=\delta\eta'(\beta)
\end{aligned}$$

genügen, so folgt damit aus (23)

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^\alpha \eta_\varkappa''\,\delta\eta_\varkappa''\,d\xi &= \eta_\varkappa''(\alpha)\cdot\delta\eta'(\alpha)-\eta_\varkappa'''(\alpha)\cdot\delta\eta(\alpha)+\int_0^\alpha \eta_\varkappa^{(4)}\,\delta\eta_\varkappa\,d\xi,\\
\int_\alpha^\beta \eta_\lambda''\,\delta\eta_\lambda''\,d\xi &= \eta_\lambda''(\beta)\cdot\delta\eta'(\beta)-\eta_\lambda''(\alpha)\cdot\delta\eta'(\alpha)\\
&\quad -\eta_\lambda'''(\beta)\cdot\delta\eta(\beta)+\eta_\lambda'''(\alpha)\cdot\delta\eta(\alpha)+\int_\alpha^\beta \eta_\lambda^{(4)}\,\delta\eta_\lambda\,d\xi,\\
\int_\beta^1 \eta_\mu''\,\delta\eta_\mu''\,d\xi &= -\eta_\mu''(\beta)\cdot\delta\eta'(\beta)+\eta_\mu'''(\beta)\cdot\delta\eta(\beta)+\int_\beta^1 \eta_\mu^{(4)}\,\delta\eta_\mu\,d\xi,\\
\frac{1}{4}u\int_\alpha^\beta \varrho_\lambda^4\,\eta_\lambda'\,\delta\eta_\lambda'\,d\xi &= \frac{1}{4}u\,\varrho_\lambda^4(\beta)\,\eta_\lambda'(\beta)\,\delta\eta(\beta)\\
&\quad -\frac{1}{4}u\,\varrho_\lambda^4(\alpha)\,\eta_\lambda'(\alpha)\,\delta\eta(\alpha)-\frac{1}{4}u\int_\alpha^\beta(\varrho_\lambda^4\,\eta_\lambda')'\,\delta\eta_\lambda\,d\xi.
\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

Mit (24) ergibt sich aus (22) nach Zusammenfassung der mit $\delta\eta(\alpha)$, $\delta\eta'(\alpha)$, $\delta\eta(\beta)$ und $\delta\eta'(\beta)$ behafteten Glieder

$$\left.\begin{aligned}
&\delta\eta'(\alpha)\,[\eta_\varkappa''(\alpha)-\eta_\lambda''(\alpha)]+\delta\eta'(\beta)\,[\eta_\lambda''(\beta)-\eta_\mu''(\beta)]\\
&-\delta\eta(\alpha)\left[\eta_\varkappa'''(\alpha)-\eta_\lambda'''(\alpha)+\frac{1}{4}u\,\varrho_\lambda^4(\alpha)\,\eta_\lambda'(\alpha)\right]\\
&-\delta\eta(\beta)\left[\eta_\lambda'''(\beta)-\eta_\mu'''(\beta)-\frac{1}{4}u\,\varrho_\lambda^4(\beta)\,\eta_\lambda'(\beta)\right]\\
&+\int_0^\alpha \eta_\varkappa^{(4)}\delta\eta_\varkappa\,d\xi+\int_\alpha^\beta\left[\eta_\lambda^{(4)}-\frac{1}{4}u(\varrho_\lambda^4\,\eta_\lambda')'-u\,\varrho_\lambda^2\,\eta_\lambda\right]\delta\eta_\lambda\,d\xi+\int_\beta^1 \eta_\mu^{(4)}\,\delta\eta_\mu\,d\xi=0.
\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

Beachtet man jetzt, daß (25) für voneinander unabhängige Variationen $\delta\eta_j$, $\delta\eta_j'(j=\varkappa,\lambda,\mu)$ erfüllt sein muß, wobei diese den oben genannten Bedingungen genügen, so erkennt man, daß die Integranden der drei Integrale für sich verschwinden müssen — womit man wieder zu (18) gelangt —, und daß ferner jede der eckigen Klammern gleich Null sein muß. Die letzte Aussage liefert die noch fehlenden Übergangsbedingungen für synchrone Präzession im Gleichlauf:

$$\left.\begin{aligned}
&\eta_\varkappa''(\alpha)=\eta_\lambda''(\alpha),\quad \eta_\varkappa'''(\alpha)=\eta_\lambda'''(\alpha)-\frac{1}{4}u\,\varrho_\lambda^4(\alpha)\,\eta_\lambda'(\alpha),\\
&\eta_\lambda''(\beta)=\eta_\mu''(\beta),\quad \eta_\lambda'''(\beta)=\eta_\mu'''(\beta)-\frac{1}{4}u\,\varrho_\lambda^4(\beta)\,\eta_\lambda'(\beta).
\end{aligned}\right\}\tag{26a}$$

Für synchrone Präzession im Gegenlauf bzw. unberücksichtigte Kreiselwirkung erhält man analog

$$\left.\begin{aligned}
&\eta_\varkappa''(\alpha)=\eta_\lambda''(\alpha),\quad \eta_\varkappa'''(\alpha)=\eta_\lambda'''(\alpha)+\frac{3}{4}u\,\varrho_\lambda^4(\alpha)\,\eta_\lambda'(\alpha),\\
&\eta_\lambda''(\beta)=\eta_\mu''(\beta),\quad \eta_\lambda'''(\beta)=\eta_\lambda'''(\beta)+\frac{3}{4}u\,\varrho_\lambda^4(\beta)\,\eta_\lambda'(\beta)
\end{aligned}\right\}\tag{26b}$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned}
&\eta_\varkappa''(\alpha)=\eta_\lambda''(\alpha),\quad \eta_\varkappa'''(\alpha)=\eta_\lambda'''(\alpha),\\
&\eta_\lambda''(\beta)=\eta_\mu''(\beta),\quad \eta_\lambda'''(\beta)=\eta_\mu'''(\beta).
\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

Aus den Gleichungen (26), (26a) und (26b), die für einen Rotor gemäß Abb. 2 abgeleitet wurden, lassen sich sofort die entsprechenden Gleichungen für den allgemeinsten Typ der Mehrfelderwelle angeben.

Durch die Differentialgleichung (17) bzw. (17a) bzw. (17b) einschließlich der zugehörigen Rand- und Übergangsbedingungen einerseits und die Integralgleichung (8) bzw. die Integrodifferentialgleichung (10a) bzw. (10b) andererseits wird das gleiche Eigenwertproblem dargestellt. Diese Äquivalenz kann man kontrollieren, indem man gemäß (8) bzw. (10a) bzw. (10b) für die einzelnen Felder die Auslenkungsfunktionen aufstellt, diese viermal nach ξ differentiiert und die Werte der in den entsprechenden Rand- und Übergangsbedingungen vorkommenden Funktionen und ihrer Ableitungen berechnet.

4. Eine Verallgemeinerung des Verfahrens von *R. Grammel* zur angenäherten Berechnung der kritischen Drehzahlen unter Berücksichtigung der Kreiselwirkung. Bei der angenäherten Auflösung von Eigenwertproblemen spielen die sog. „zulässigen Funktionen" eine wesentliche Rolle: sie sind für die hier zu behandelnden Fälle wie folgt definiert:

Eine reelle Funktion $v(\xi)$ heißt zulässige Funktion des vorliegenden Eigenwertsproblems, wenn $v(\xi)$ viermal stetig differentiierbar ist und den Randbedingungen $v(0) = v(1) = v''(0) = v''(1) = 0$ genügt.

Endlich viele linear unabhängige zulässige Funktionen $v_k \not\equiv 0$ bilden in der Form

$$q(\xi) = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k(\xi)$$

mit zunächst noch unbestimmten Koeffizienten a_k einen „Näherungsansatz".

Ausgangspunkt der Näherungsrechnung (wieder für den speziellen Fall eines Rotors gemäß Abb. 2 für synchrone Präzession im Gleichlauf) ist die Variationsgleichung (22), die sich mit (23) umformen läßt zu

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{\varkappa} \eta_{I\varkappa}^{(4)}\,\delta\eta_{I\varkappa}\,d\xi + \eta_{I\varkappa}''\,\delta\eta_{I\varkappa}'\Big|_0^{\varkappa} - \eta_{I\varkappa}'''\,\delta\eta_{I\varkappa}\Big|_0^{\varkappa} \\
&+ \int_{\varkappa}^{\beta}\left(\eta_{I\lambda}^{(4)} - \frac{1}{4}\,u\,(\varrho_\lambda^4\,\eta_{I\lambda}')' - u\,\varrho_\lambda^2\eta_{I\lambda}\right)\delta\eta_{I\lambda}\,d\xi + \eta_{I\lambda}''\,\delta\eta_{I\lambda}'\Big|_{\varkappa}^{\beta} - \eta_{I\lambda}'''\,\delta\eta_{I\lambda}\Big|_{\varkappa}^{\beta} + \frac{1}{4}\,u\,\varrho_\lambda^4\,\eta_{I\lambda}'\,\delta\eta_{I\lambda}\Big|_{\varkappa}^{\beta} \\
&+ \int_{\beta}^{1} \eta_{I\mu}^{(4)}\,\delta\eta_{I\mu}\,d\xi + \eta_{I\mu}''\,\delta\eta_{I\mu}'\Big|_{\beta}^{1} - \eta_{I\mu}'''\,\delta\eta_{I\mu}\Big|_{\beta}^{1} = 0\,,
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Die angenäherte Auflösung des Eigenwertproblems vollzieht sich folgendermaßen:

1) Man ersetzt in (27) die Funktionen η_{Ij} $(j = \varkappa, \lambda, \mu)$ durch solche Iterationen, die sich auf Grund der Vorschrift

$$\left.\begin{aligned}
\bar\eta_{I\varkappa}(\xi) = &- K_{01}(\xi,\beta)\,\frac{1}{4}\,\varrho_\lambda^4(\beta)\,q'(\beta) + K_{01}(\xi,\alpha)\,\frac{1}{4}\,\varrho_\lambda^4(\alpha)\,q'(\alpha) \\
&+ \int_{\alpha}^{\beta} K_{01}(\xi,\tau)\left[\varrho_\lambda^2(\tau)\,q(\tau) + \frac{1}{4}\,\frac{d}{d\tau}\left(\varrho_\lambda^4(\tau)\,q'(\tau)\right)\right]d\tau\,, \\
\bar\eta_{I\lambda}(\xi) = &- K_{01}(\xi,\beta)\,\frac{1}{4}\,\varrho_\lambda^4(\beta)\,q'(\beta) + K_{02}(\xi,\alpha)\,\frac{1}{4}\,\varrho_\lambda^4(\alpha)\,q'(\alpha) \\
&+ \int_{\alpha}^{\xi} K_{02}(\xi,\tau)\left[\varrho_\lambda^2(\tau)\,q(\tau) + \frac{1}{4}\,\frac{d}{d\tau}\left(\varrho_\lambda^4(\tau)\,q'(\tau)\right)\right]d\tau \\
&+ \int_{\xi}^{\beta} K_{01}(\xi,\tau)\left[\varrho_\lambda^2(\tau)\,q(\tau) + \frac{1}{4}\,\frac{d}{d\tau}\left(\varrho_\lambda^4(\tau)\,q'(\tau)\right)\right]d\tau\,, \\
\bar\eta_{I\mu}(\xi) = &- K_{02}(\xi,\beta)\,\frac{1}{4}\,\varrho_\lambda^4(\beta)\,q'(\beta) + K_{02}(\xi,\alpha)\,\frac{1}{4}\,\varrho_\lambda^4(\alpha)\,q'(\alpha) \\
&+ \int_{\alpha}^{\beta} K_{02}(\xi,\tau)\left[\varrho_\lambda^2(\tau)\,q(\tau) + \frac{1}{4}\,\frac{d}{d\tau}\left(\varrho_\lambda^4(\tau)\,q'(\tau)\right)\right]d\tau
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

und der dazu äquivalenten Vorschrift

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\eta}_{\varkappa}^{(4)}(\xi) = 0\,, \\ &\bar{\eta}_{\lambda}^{(4)}(\xi) = \varrho_{\lambda}^{2}(\xi)\,\varphi\,(\xi) + \frac{1}{4}\frac{d}{d\xi}\left(\varrho_{\lambda}^{4}(\xi)\,\varphi'(\xi)\right), \\ &\bar{\eta}_{\mu}^{(4)}(\xi) = 0 \end{aligned}\right| \tag{29}$$

einschließlich der Rand- und Übergangsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\eta}_{\varkappa}(0) = \bar{\eta}_{\varkappa}''(0) = \bar{\eta}_{\mu}(1) = \bar{\eta}_{\mu}''(1) = 0\,, \\ &\bar{\eta}_{\varkappa}(\alpha) = \bar{\eta}_{\lambda}(\alpha)\,, \quad \bar{\eta}_{\lambda}(\beta) = \bar{\eta}_{\mu}(\beta)\,, \\ &\bar{\eta}_{\varkappa}'(\alpha) = \bar{\eta}_{\lambda}'(\alpha)\,, \quad \bar{\eta}_{\lambda}'(\beta) = \bar{\eta}_{\mu}'(\beta)\,, \\ &\bar{\eta}_{\varkappa}''(\alpha) = \bar{\eta}_{\lambda}''(\alpha)\,, \quad \bar{\eta}_{\lambda}''(\beta) = \bar{\eta}_{\mu}''(\beta)\,, \\ &\bar{\eta}_{\varkappa}'''(\alpha) = \bar{\eta}_{\lambda}'''(\alpha) - \frac{1}{4}\,\varrho_{\lambda}^{4}(\alpha)\,\varphi'(\alpha)\,, \quad \bar{\eta}_{\mu}'''(\beta) = \bar{\eta}_{\lambda}'''(\beta) - \frac{1}{4}\,\varrho_{\lambda}^{4}(\beta)\,\varphi'(\beta) \end{aligned}\right| \tag{30}$$

darstellen lassen, wobei $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k\, v_k$, $\varphi' = \sum_{k=1}^{n} a_k\, v_k'$ ist.

2) Man ersetzt die Variationen $\delta\eta_j$, $\delta\eta_j'$ $(j = \varkappa, \lambda, \mu)$ durch Variationen von der Form

$$\delta\bar{\eta}^{(i)}(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \delta a_k\, v_k^{(i)}(\xi) = \begin{cases} \delta\bar{\eta}_{\varkappa}^{(i)} \\ \delta\bar{\eta}_{\lambda}^{(i)} \\ \delta\bar{\eta}_{\mu}^{(i)} \end{cases} \quad \text{für} \quad \left\{\begin{aligned} &0 \leqq \xi \leqq \alpha\,, \\ &\alpha \leqq \xi \leqq \beta\,, \\ &\beta \leqq \xi \leqq 1\,, \end{aligned}\right. \quad (i = 0, 1); \tag{31}$$

hierbei gilt also

$$\left.\begin{aligned} &\delta\bar{\eta}_{\varkappa}(0) = \delta\bar{\eta}_{\mu}(1) = 0\,, \\ &\delta\bar{\eta}_{\varkappa}(\alpha) = \delta\bar{\eta}_{\lambda}(\alpha) = \delta\bar{\eta}(\alpha)\,, \quad \delta\bar{\eta}_{\lambda}(\beta) = \delta\bar{\eta}_{\mu}(\beta) = \delta\bar{\eta}(\beta)\,, \\ &\delta\bar{\eta}_{\varkappa}'(\alpha) = \delta\bar{\eta}_{\lambda}'(\alpha) = \delta\bar{\eta}'(\alpha)\,, \quad \delta\bar{\eta}_{\lambda}'(\beta) = \delta\bar{\eta}_{\mu}'(\beta) = \delta\bar{\eta}'(\beta)\,. \end{aligned}\right| \tag{32}$$

3) Der durch diese Vorschriften entstandene Ausdruck wird gleich Null gesetzt.

Geht man mit den unter 1) und 2) gemachten Vorschriften in (27) ein, so folgt unter Beachtung von (30) und (32) zunächst für die Glieder vom Typ $\eta_{\varkappa}''\,\delta\eta_{\varkappa}'\big|_0^{\alpha}$ usw. — wobei jetzt $\bar{u}$ statt u geschrieben wird, um hervorzuheben, daß es sich um eine Näherungsrechnung handelt —

$$\begin{aligned} &\bar{\eta}_{\varkappa}''\,\delta\bar{\eta}_{\varkappa}'\big|_0^{\alpha} - \bar{\eta}_{\varkappa}'''\,\delta\bar{\eta}_{\varkappa}\big|_0^{\alpha} + \bar{\eta}_{\lambda}''\,\delta\bar{\eta}_{\lambda}'\big|_{\alpha}^{\beta} - \bar{\eta}_{\lambda}'''\,\delta\bar{\eta}_{\lambda}\big|_{\alpha}^{\beta} + \bar{\eta}_{\mu}''\,\delta\bar{\eta}_{\mu}'\big|_{\beta}^{1} - \bar{\eta}_{\mu}'''\,\delta\bar{\eta}_{\mu}\big|_{\beta}^{1} + \frac{1}{4}\,\bar{u}\,\varrho_{\lambda}^{4}\,\bar{\eta}_{\lambda}'\,\delta\bar{\eta}_{\lambda}\big|_{\alpha}^{\beta} \\ &= \delta\bar{\eta}'(\alpha)\,[\bar{\eta}_{\varkappa}''(\alpha) - \bar{\eta}_{\lambda}''(\alpha)] + \delta\bar{\eta}'(\beta)\,[\bar{\eta}_{\lambda}''(\beta) - \bar{\eta}_{\mu}''(\beta)] \\ &- \delta\bar{\eta}(\alpha)\left[\bar{\eta}_{\varkappa}'''(\alpha) - \bar{\eta}_{\lambda}'''(\alpha) + \frac{1}{4}\,\bar{u}\cdot\varrho_{\lambda}^{4}(\alpha)\,\bar{\eta}_{\lambda}'(\alpha)\right] + \delta\bar{\eta}(\beta)\left[\bar{\eta}_{\mu}'''(\beta) - \bar{\eta}_{\lambda}'''(\beta) + \frac{1}{4}\,\bar{u}\cdot\varrho_{\lambda}^{4}(\beta)\,\bar{\eta}_{\lambda}'(\beta)\right] \\ &- \bar{\eta}_{\varkappa}''(0)\,\delta\bar{\eta}_{\varkappa}'(0) + \bar{\eta}_{\varkappa}'''(0)\,\delta\bar{\eta}_{\varkappa}(0) + \bar{\eta}_{\mu}''(1)\,\delta\bar{\eta}_{\mu}'(1) - \bar{\eta}_{\mu}'''(1)\,\delta\bar{\eta}_{\mu}(1) \\ &= -\delta\bar{\eta}(\alpha)\left[\bar{\eta}_{\varkappa}'''(\alpha) - \bar{\eta}_{\lambda}'''(\alpha) + \frac{1}{4}\,\bar{u}\,\varrho_{\lambda}^{4}(\alpha)\,\bar{\eta}_{\lambda}'(\alpha)\right] + \delta\bar{\eta}(\beta)\left[\bar{\eta}_{\mu}'''(\beta) - \bar{\eta}_{\lambda}'''(\beta) + \frac{1}{4}\,\bar{u}\,\varrho_{\lambda}^{4}(\beta)\,\bar{\eta}_{\lambda}'(\beta)\right] \\ &= -\delta\bar{\eta}(\alpha)\left[-\frac{1}{4}\,\varrho_{\lambda}^{4}(\alpha)\,q'(\alpha) + \frac{1}{4}\,\bar{u}\,\varrho_{\lambda}^{4}(\alpha)\,\bar{\eta}_{\lambda}'(\alpha)\right] + \delta\bar{\eta}(\beta)\left[-\frac{1}{4}\,\varrho_{\lambda}^{4}(\beta)\,q'(\beta) + \frac{1}{4}\,\bar{u}\,\varrho_{\lambda}^{4}(\beta)\,\bar{\eta}_{\lambda}'(\beta)\right]. \end{aligned}$$

Weiter verschwinden in (27) wegen der ersten und dritten Gleichung (29) die Integrale $\int_0^{\alpha} \ldots$. und $\int_{\beta}^{1} \ldots$. Man erhält somit zusammenfassend und gemäß Vorschrift 3) das Ergebnis gleich Null setzend

$$\begin{aligned} &\int_{\alpha}^{\beta}\left[\varrho_{\lambda}^{2}(\xi)\,q\,(\xi) + \frac{1}{4}\,\frac{d}{d\xi}\left(\varrho_{\lambda}^{4}(\xi)\,q'(\xi)\right) - \frac{1}{4}\,\bar{u}\,\frac{d}{d\xi}\left(\varrho_{\lambda}^{4}(\xi)\,\bar{\eta}_{\lambda}'(\xi)\right) - \bar{u}\,\varrho_{\lambda}^{2}(\xi)\,\bar{\eta}_{\lambda}(\xi)\right]\delta\bar{\eta}\,d\xi \\ &- \delta\bar{\eta}(\alpha)\left[-\frac{1}{4}\,\varrho_{\lambda}^{4}(\alpha)\,q'(\alpha) + \frac{1}{4}\,\bar{u}\,\varrho_{\lambda}^{4}(\alpha)\,\bar{\eta}_{\lambda}'(\alpha)\right] + \delta\bar{\eta}(\beta)\left[-\frac{1}{4}\,\varrho_{\lambda}^{4}(\beta)\,q'(\beta) + \frac{1}{4}\,\bar{u}\,\varrho_{\lambda}^{4}(\beta)\,\bar{\eta}_{\lambda}'(\beta)\right] = 0\,. \end{aligned} \tag{33}$$

Mit (31) geht (33) über in

$$\sum_{i=1}^{n} \delta a_i \Bigg\{ \int_{\alpha}^{\beta} \Big[\varrho_\lambda^2(\xi)\, q(\xi) + \frac{1}{4}\frac{d}{d\xi}\big(\varrho_\lambda^4(\xi)\, q'(\xi)\big) - \frac{1}{4}\bar{u}\frac{d}{d\xi}\big(\varrho_\lambda^4(\xi)\,\bar{\eta}_{i\lambda}'(\xi)\big) - \bar{u}\,\varrho_\lambda^2(\xi)\,\bar{\eta}_{i\lambda}(\xi) \Big] v_i(\xi)\, d\xi$$
$$- v_i(\alpha)\Big[-\frac{1}{4}\varrho_\lambda^4(\alpha)\, q'(\alpha) + \frac{1}{4}\bar{u}\,\varrho_\lambda^4(\alpha)\,\bar{\eta}_{i\lambda}'(\alpha)\Big] + v_i(\beta)\Big[-\frac{1}{4}\varrho_\lambda^4(\beta) q'(\beta) + \frac{1}{4}\bar{u}\,\varrho_\lambda^4(\beta)\,\bar{\eta}_{i\lambda}'(\beta)\Big] \Bigg\} = 0\,,$$

woraus wegen der Willkürlichkeit der δa_i folgt

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\alpha}^{\beta} \Big\{ \varrho_\lambda^2(\xi)\, q(\xi) + \frac{1}{4}\frac{d}{d\xi}\big(\varrho_\lambda^4(\xi)\, q'(\xi)\big) - \bar{u}\Big[\frac{1}{4}\frac{d}{d\xi}\big(\varrho_\lambda^4(\xi)\,\bar{\eta}_{i\lambda}'(\xi)\big) + \varrho_\lambda^2(\xi)\,\eta_{i\lambda}(\xi)\Big] \Big\} v_i(\xi)\, d\xi \\ &- \frac{1}{4}\big[v_i(\xi)\,\varrho_\lambda^4(\xi)\, q'(\xi)\big]_\alpha^\beta + \frac{1}{4}\bar{u}\big[v_i(\xi)\,\varrho_\lambda^4(\xi)\,\bar{\eta}_{i\lambda}'(\xi)\big]_\alpha^\beta = 0\,, \qquad (i = 1, \ldots, n)\,. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Mit den Umformungen

$$-\frac{1}{4}\bar{u}\int_{\alpha}^{\beta} v_i(\xi)\,\frac{d}{d\xi}\big(\varrho_\lambda^4(\xi)\,\bar{\eta}_{i\lambda}'(\xi)\big)\,d\xi = -\frac{1}{4}\bar{u}\big[v_i(\xi)\,\varrho_\lambda^4(\xi)\,\bar{\eta}_{i\lambda}'(\xi)\big]_\alpha^\beta + \frac{1}{4}\bar{u}\big[v_i'(\xi)\,\varrho_\lambda^4(\xi)\,\bar{\eta}_{i\lambda}(\xi)\big]_\alpha^\beta$$
$$-\frac{1}{4}\bar{u}\int_{\alpha}^{\beta}\bar{\eta}_{i\lambda}(\xi)\,\frac{d}{d\xi}\big(\varrho_\lambda^4(\xi)\, v_i'(\xi)\big)\,d\xi\,,$$

$$\frac{1}{4}\int_{\alpha}^{\beta} v_i(\xi)\,\frac{d}{d\xi}\big(\varrho_\lambda^4(\xi)\, q'(\xi)\big)\,d\xi = \frac{1}{4}\big[v_i(\xi)\,\varrho_\lambda^4(\xi)\, q'(\xi)\big]_\alpha^\beta - \frac{1}{4}\int_{\alpha}^{\beta} v_i'(\xi)\,\varrho_\lambda^4(\xi)\, q'(\xi)\,d\xi\,,$$

folgt aus (34)

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Big\{ v_i(\xi)\,\varrho_\lambda^2(\xi)\, q(\xi) - \frac{1}{4}v_i'(\xi)\,\varrho_\lambda^4(\xi)\, q'(\xi) - \bar{u}\,\bar{\eta}_{i\lambda}(\xi)\Big[\frac{1}{4}\frac{d}{d\xi}\big(\varrho_\lambda^4(\xi)\, v_i'(\xi)\big) + \varrho_\lambda^2(\xi)\, v_i(\xi)\Big] \Big\}\, d\xi$$
$$-\bar{u}\Big[-\frac{1}{4}\varrho_\lambda^4(\xi)\, v_i'(\xi)\,\bar{\eta}_{i\lambda}(\xi)\Big]_\alpha^\beta = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

Setzt man für $\bar{\eta}_{i\lambda}$, q und q' die entsprechenden Werte ein, so ergibt sich aus der letzten Gleichung nach Vorziehen von $\sum_{k=1}^{n}{}'$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} a_k \Bigg\{ \int_{\alpha}^{\beta} \Big[\varrho_\lambda^2(\xi)\, v_i(\xi)\, v_k(\xi) - \frac{1}{4}\varrho_\lambda^4(\xi)\, v_i'(\xi)\, v_k'(\xi) \\ &\quad - \bar{u}\Big\{\frac{1}{4}\frac{d}{d\xi}\big(\varrho_\lambda^4(\xi)\, v_i'(\xi)\big) + \varrho_\lambda^2(\xi)\, v_i(\xi)\Big\} \\ &\quad \times \Big\{ -K_{01}(\xi,\beta)\,\frac{1}{4}\varrho_\lambda^4(\beta)\, v_k'(\beta) + K_{02}(\xi,\alpha)\,\frac{1}{4}\varrho_\lambda^4(\alpha)\, v_k'(\alpha) \\ &\qquad + \int_{\alpha}^{\xi} K_{02}(\xi,\tau)\Big\{\varrho_\lambda^2(\tau)\, v_k(\tau) + \frac{1}{4}\frac{d}{d\tau}\big(\varrho_\lambda^4(\tau)\, v_k'(\tau)\big)\Big\}\,d\tau \\ &\qquad + \int_{\xi}^{\beta} K_{01}(\xi,\tau)\Big\{\varrho_\lambda^2(\tau)\, v_k(\tau) + \frac{1}{4}\frac{d}{d\tau}\big(\varrho_\lambda^4(\tau)\, v_k'(\tau)\big)\Big\}\,d\tau \Big\}\, d\xi \\ &-\bar{u}\Big\{ -\frac{1}{4}\varrho_\lambda^4(\beta)\, v_i'(\beta)\Big(-K_{01}(\beta,\beta)\,\frac{1}{4}\varrho_\lambda^4(\beta)\, v_k'(\beta) + K_{02}(\beta,\alpha)\,\frac{1}{4}\varrho_\lambda^4(\alpha)\, v_k'(\alpha) \\ &\qquad + \int_{\alpha}^{\beta} K_{02}(\beta,\tau)\Big[\varrho_\lambda^2(\tau)\, v_k(\tau) + \frac{1}{4}\frac{d}{d\tau}\big(\varrho_\lambda^4(\tau)\, v_k'(\tau)\big)\Big]\,d\tau\Big) \\ &\quad + \frac{1}{4}\varrho_\lambda^4(\alpha)\, v_i'(\alpha)\Big(-K_{01}(\alpha,\beta)\,\frac{1}{4}\varrho_\lambda^4(\beta)\, v_k'(\beta) + K_{02}(\alpha,\alpha)\,\frac{1}{4}\varrho_\lambda^4(\alpha)\, v_k'(\alpha) \\ &\qquad + \int_{\alpha}^{\beta} K_{01}(\alpha,\tau)\Big[\varrho_\lambda^2(\tau)\, v_k(\tau) + \frac{1}{4}\frac{d}{d\tau}\big(\varrho_\lambda^4(\tau)\, v_k'(\tau)\big)\Big]\,d\tau\Big)\Big\} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

mit

$$\bar{v}_{\lambda j}(\xi) = -K_{01}(\xi,\beta)\,\frac{1}{4}\,\varrho_\lambda^4(\beta)\,v_j'(\beta) + K_{02}(\xi,\alpha)\,\frac{1}{4}\,\varrho_\lambda^4(\alpha)\,v_j'(\alpha)$$
$$+\int_\alpha^\xi K_{02}(\xi,\tau)\left[\varrho_\lambda^2(\tau)\,v_j(\tau)+\frac{1}{4}\,\frac{d}{d\tau}\left(\varrho_\lambda^4(\tau)\,v_j'(\tau)\right)\right]d\tau$$
$$+\int_\xi^\beta K_{01}(\xi,\tau)\left[\varrho_\lambda^2(\tau)\,v_j(\tau)+\frac{1}{4}\,\frac{d}{d\tau}\left(\varrho_\lambda^4(\tau)\,v_j'(\tau)\right)\right]d\tau\,,$$

$$P_{\alpha j}^* = \frac{1}{4}\,\varrho_\lambda^4(\alpha)\,v_j'(\alpha)\,, \qquad P_{\beta j}^* = -\frac{1}{4}\,\varrho_\lambda^4(\beta)\,v_j'(\beta)\,,$$

$$q_j^*(\xi) = \varrho_\lambda^2(\xi)\,v_j(\xi)+\frac{1}{4}\,\frac{d}{d\xi}\left(\varrho_\lambda^4(\xi)\,v_j'(\xi)\right) \qquad (j=1,\ldots,n)$$

(ein Stern soll auf synchrone Präzession im Gleichlauf, zwei Sterne auf synchrone Präzession im Gegenlauf hinweisen) geht (35) über in

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\left[\int_\alpha^\beta\left(\varrho_\lambda^2(\xi)\,v_i(\xi)\,v_k(\xi)-\frac{1}{4}\,\varrho_\lambda^4(\xi)\,v_i'(\xi)\,v_k'(\xi)-\bar{u}\cdot q_i^*(\xi)\,\bar{v}_{\lambda k}(\xi)\right)d\xi\right.$$
$$\left.-\bar{u}\left(P_{\beta i}^*\cdot\bar{v}_{\lambda k}(\beta)+P_{\alpha i}^*\cdot\bar{v}_{\lambda k}(\alpha)\right)\right]=0 \qquad (i=1,\ldots,n)\,. \tag{36}$$

Hier ist $\bar{v}_{\lambda k}(\xi)$ die Wellenauslenkung in $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$, hervorgerufen von der in $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$ kontinuierlich verteilten Last $q_k^*(\xi)$ und den in $\xi=\alpha$ und $\xi=\beta$ senkrecht zur Ruhelage der Welle angreifenden Einzelkräften $P_{\alpha k}^*$ und $P_{\beta k}^*$. Demnach ist

$$B_{ik}^* = \int_\alpha^\beta q_i^*(\xi)\,\bar{v}_{\lambda k}(\xi)\,d\xi + P_{\beta i}^*\,\bar{v}_{\lambda k}(\beta) + P_{\alpha i}^*\,\bar{v}_{\lambda k}(\alpha) \tag{37}$$

die von der aus $q_i^*(\xi)$, $P_{\alpha i}^*$ und $P_{\beta i}^*$ bestehenden Belastung bei der Auslenkung $\bar{v}_{\lambda k}(\xi)$ geleistete doppelte Arbeit. Mit (37) und

$$A_{ik} = \int_\alpha^\beta \varrho_\lambda^2\,v_i\,v_k\,d\xi\,, \qquad K_{ik} = \int_\alpha^\beta \varrho_\lambda^4\,v_i'\,v_k'\,d\xi \tag{38}$$

folgt aus (36)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\left(A_{ik}-\frac{1}{4}\,K_{ik}-\bar{u}\,B_{ik}^*\right)=0 \qquad (i=1,\ldots,n)\,. \tag{39}$$

Durch Nullsetzen der Koeffizientendeterminante dieses linearen homogenen Gleichungssystems für die a_k erhält man eine Gleichung n-ten Grades für $\bar{u}$:

$$\left|A_{ik}-\frac{1}{4}\,K_{ik}-\bar{u}\,B_{ik}^*\right|=0 \qquad (i,k=1,\ldots,n)\,. \tag{40a}$$

Die Auswertung der Größen B_{ik}^* verursacht schon bei einfachen Beispielen sehr viel Rechenarbeit. Diese läßt sich, wie *R. Grammel*[1] gezeigt hat, unter Verwendung der Biegemomente umgehen. Ist $M_j^* = M(P_{\alpha j}^*, P_{\beta j}^*, q_j^*)$ das zur Belastung $P_{\alpha j}^*$, $P_{\beta j}^*, q_j^*$ gehörige Biegemoment bei reiner Biegung, so ist

$$B_{ik}^* = \int_0^l M_i^*\,M_k^*\,d\xi\,. \tag{41a}$$

Für synchrone Präzession im Gegenlauf und unberücksichtigte Kreiselwirkung gelten die vorstehenden Ausführungen in entsprechender Form. Die sich einstellenden Endergebnisse lauten:

$$\left|A_{ik}+\frac{3}{4}\,K_{ik}-\bar{u}\,B_{ik}^{**}\right|=0\,. \tag{40b}$$

$$\left|A_{ik}-\bar{u}\,B_{ik}\right|=0\,, \tag{40}$$

$$B_{ik}^{**} = \int_0^l M_i^{**}\,M_k^{**}\,d\xi\,. \tag{41b}$$

[1] Siehe Fußnote 3 von S. 111.

$$B_{ik} = \int_0^1 M_i\, M_k\, d\xi \tag{41}$$

mit $$M_j^{**} = M(P_{\alpha j}^{**},\ P_{\beta j}^{**},\ q_j^{**}), \quad q_j^{**}(\xi) = \varrho_\lambda^2(\xi)\, v_j(\xi) - \frac{3}{4}\frac{d}{d\xi}\left(\varrho_\lambda^4(\xi)\, v_j'(\xi)\right),$$

$$P_{\alpha j}^{**} = -\frac{3}{4}\,\varrho_\lambda^4(\alpha)\, v_j'(\alpha), \qquad P_{\beta j}^{**} = \frac{3}{4}\,\varrho_\lambda^4(\beta)\, v_j'(\beta)$$

bzw.

$$M_j = M(q_j), \qquad q_j(\xi) = \varrho_\lambda^2(\xi)\, v_j(\xi).$$

Im Falle einer durch $\varrho_p(\xi) = \varrho_{op} + i_p\,\xi$ in $\alpha_p \leqq \xi \leqq \beta_p$ $(p = 1, \ldots, m)$ $(\alpha_i < \beta_i \leqq \alpha_{i+1} < \beta_{i+1};\ 0 \leqq \alpha_1, \beta_m \leqq 1)$ gegebenen Scheibenverteilung erhält man ebenfalls die Gleichungen (40) bis (40b). Dabei bedeuten jetzt

$$A_{ik} = \sum_{p=1}^{m} \int_{\alpha_p}^{\beta_p} \varrho_p^2(\xi)\, v_i(\xi)\, v_k(\xi)\, d\xi, \qquad K_{ik} = \sum_{p=1}^{m} \int_{\alpha_p}^{\beta_p} \varrho_p^4(\xi)\, v_i'(\xi)\, v_k'(\xi)\, d\xi,$$

$$B_{ik}^{*} = \int_0^1 M_i^{*}\, M_k^{*}\, d\xi, \qquad M_j^{*} = M(P_{\alpha_1 j}^{*},\ P_{\beta_1 j}^{*}, \ldots,\ P_{\alpha_m j}^{*},\ P_{\beta_m j}^{*};\ q_{1j}^{*}, \ldots,\ q_{mj}^{*}),$$

$$B_{ik}^{**} = \int_0^1 M_i^{**}\, M_k^{**}\, d\xi, \quad M_j^{**} = M(P_{\alpha_1 j}^{**},\ P_{\beta_1 j}^{**}, \ldots,\ P_{\alpha_m j}^{**},\ P_{\beta_m j}^{**};\ q_{1j}^{**}, \ldots,\ q_{mj}^{**}),$$

$$P_{\alpha_p j}^{*} = \frac{1}{4}\,\varrho_p^4(\alpha_p)\, v_j'(\alpha_p), \qquad P_{\beta_p j}^{*} = -\frac{1}{4}\,\varrho_p^4(\beta_p)\, v_j'(\beta_p),$$

$$q_{pj}^{*}(\xi) = \varrho_p^2(\xi)\, v_j(\xi) + \frac{1}{4}\frac{d}{d\xi}\left(\varrho_p^4(\xi)\, v_j'(\xi)\right) \qquad (\alpha_p \leqq \xi \leqq \beta_p),$$

$$P_{\beta_p j}^{**} = \frac{3}{4}\,\varrho_p^4(\beta_p)\, v_j'(\beta_p), \qquad P_{\alpha_p j}^{**} = -\frac{3}{4}\,\varrho_p^4(\alpha_p)\, v_j'(\alpha_p), \qquad (p = 1, \ldots, m),$$

$$q_{pj}^{**}(\xi) = \varrho_p^2(\xi)\, v_j(\xi) - \frac{3}{4}\frac{d}{d\xi}\left(\varrho_p^4(\xi)\, v_j'(\xi)\right) \quad (\alpha_p \leqq \xi \leqq \beta_p) \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

5. Eine Gegenüberstellung der Verfahren von *W. Ritz* und *R. Grammel*. Nach der Methode von *W. Ritz*[1] wird das Integral

$$I = \int_0^1 \left(\eta''^2 + \frac{1}{4}\, u\, \varrho^4 \eta'^2 - u\, \varrho^2 \eta^2\right) d\xi$$

(synchrone Präzession im Gleichlauf) zu einem Extremum gemacht, indem man hierin $\eta^{(j)}$ durch $\sum_{k=1}^{n} a_k\, v_k^{(j)}$ $(j = 0, 1, 2)$ ersetzt und die Operation $\frac{\partial I^*}{\partial a_i} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ ausführt:

$$I^* = \int_0^1 \left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\, v_k''\right)^2 + \frac{1}{4}\,\bar{u}\,\varrho^4 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\, v_k'\right)^2 - \bar{u}\,\varrho^2 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\, v_k\right)^2\right] d\xi,$$

$$\frac{\partial I^*}{\partial a_i} = 2\int_0^1 \left[v_i'' \sum_{k=1}^{n} a_k\, v_k'' + \frac{1}{4}\,\bar{u}\,\varrho^4 v_i' \sum_{k=1}^{n} a_k\, v_k' - \bar{u}\,\varrho^2 v_i \sum_{k=1}^{n} a_k\, v_k\right] d\xi = 0$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^1 \left[v_i''\, v_k'' + \frac{1}{4}\,\bar{u}\,\varrho^4 v_i'\, v_k' - \bar{u}\,\varrho^2 v_i\, v_k\right] d\xi = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{42}$$

Mit

$$A_{ik} = \int_0^1 \varrho^2\, v_i\, v_k\, d\xi, \qquad K_{ik} = \int_0^1 \varrho^4\, v_i'\, v_k'\, d\xi, \qquad F_{ik} = \int_0^1 v_i''\, v_k''\, d\xi$$

wobei in A_{ik} und K_{ik} nur über die Bereiche zu integrieren ist, in welchen $\varrho \neq 0$, folgt aus (42)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \left[F_{ik} - \bar{u}\left(A_{ik} - \frac{1}{4}\, K_{ik}\right)\right] = 0.$$

[1] Siehe Fußnote 2 von S. 111.

Die Gleichung n-ten Grades für $\bar{u}$ lautet

$$\left\| F_{ik} - \bar{u}\left(A_{ik} - \frac{1}{4} K_{ik}\right) \right\| = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, n), \tag{43a}$$

die entsprechenden Gleichungen für synchrone Präzession im Gegenlauf und unberücksichtigte Kreiselwirkung

$$\left\| F_{ik} - \bar{u}\left(A_{ik} + \frac{3}{4} K_{ik}\right) \right\| = 0, \tag{43b}$$

$$\left\| F_{ik} - \bar{u}\, A_{ik} \right\| = 0. \tag{43}$$

Für die Lösungen der *Ritz*schen Gleichungen (43) bis (43b) läßt sich unter gewissen mathematischen Voraussetzungen exakt beweisen[1], daß diese für unberücksichtigte Kreiselwirkung und synchrone Präzession im Gegenlauf obere Schranken, für synchrone Präzession im Gleichlauf obere Schranken für die positiven, untere Schranken für die negativen Eigenwerte sind. Für die Lösungen der nach der Methode von *R. Grammel* bzw. deren Verallgemeinerung gewonnenen Gleichungen (40) bis (40b) gelten folgende Aussagen:

a) Ohne Kreiselwirkung und synchrone Präzession im Gegenlauf gilt: In denjenigen Fällen, in welchen sich die Funktionen des Näherungsansatzes nach den Eigenfunktionen des zugehörigen Eigenwertproblems entwickeln lassen, ist unter Verwendung dieser Entwicklung mit Hilfe eines von *H. Kneser*[2] abgeleiteten Satzes beweisbar, daß die n Wurzeln von (40) bzw. (40b) obere Schranken für die n ersten Eigenwerte darstellen und genauer sind als die mit dem gleichen Näherungsansatz berechneten entsprechenden *Ritz*schen Näherungen.

b) Für synchrone Präzession im Gleichlauf ist keine allgemein gültige Aussage gefunden worden.

Da jedoch in den praktisch interessanten Fällen die den Beweisen zugrundeliegenden Voraussetzungen nicht erfüllt sind, ist man auf die bei der Durchrechnung verschiedener Beispiele, deren strenge Lösungen bekannt sind, gewonnene Erfahrung angewiesen. Im Falle *Ritz*[3] hat sich dabei gezeigt, daß man auch hier obere Schranken für die positiven Eigenwerte erhält. Im Falle *Grammel* konnte in verschiedenen Beispielen die unter a) gemachte Aussage bestätigt werden. Für synchrone Präzession im Gleichlauf wurden aus (40a) Näherungen gewonnen, die z. T. oberhalb, z. T. unterhalb der strengen Lösungen liegen, deren Abweichungen von letzteren dem Betrage nach kleiner sind als bei den entsprechenden *Ritz*schen Lösungen.

6. Zusammenfassung. In der vorliegenden Arbeit erfolgt die Berechnung der kritischen Drehzahlen von kontinuierlich besetzten Wellen konstanter Biegesteifigkeit mit einer Verallgemeinerung der von *R. Grammel* entwickelten Methode vermöge zweier miteinander äquivalenter Iterationsvorschriften: die eine bedient sich der Integrodifferentialgleichung, die zweite der Differentialgleichung samt Rand- und Übergangsbedingungen. Bei beiden Vorschriften wird die Wellenauslenkung ermittelt, die zu der mit einer linearen Kombination zulässiger Funktionen gebildeten Belastung gehört. Mit diesen Vorschriften und einer weiteren für die auftretenden Variationen geht man in die aus dem *Hamilton*schen Prinzip folgende Variationsgleichung ein. Sinngemäße Übertragung der *Grammel*schen Methode führt zu einem linearen homogenen Gleichungssystem für die Unbekannten des Näherungsansatzes, dessen verschwindende Koeffizientendeterminante eine algebraische Gleichung für die Eigenwerte darstellt.

Die charakteristische Eigenschaft der Methode von *R. Grammel*, obere Schranken — und zwar genauere als der *Ritz*sche Verfahren — zu liefern, tritt auch bei Berücksichtigung der Kreiselwirkung im Falle synchroner Präzession im Gegenlauf stets auf. Im Falle synchroner Präzession im Gleichlauf dagegen können die Näherungslösungen bei dem verallgemeinerten *Grammel*schen Verfahren z. T. oberhalb, z. T. unterhalb der entsprechenden strengen Lösungen liegen.

Unter Beachtung des physikalisch-technischen Sachverhaltes lassen sich die hier abgeleiteten Näherungsgleichungen sowohl auf mehrfach gelagerte Wellen mit konstanter Biegesteifigkeit und kontinuierlicher Scheibenverteilung als auch auf Wellen (zwei- und mehrfach gelagert) mit veränderlicher Biegesteifigkeit und Einzelscheiben übertragen. Das sich im zuletzt genannten Fall einstellende Endergebnis unterscheidet sich nur unwesentlich von demjenigen der Methode von *A. Traenkle*[4].

Eine Fortsetzung dieser Arbeit bringt die Durchrechnung eines Zahlenbeispiels.

(Eingegangen am 26. August 1955.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Ludwig Fehrle*, Mülheim/Ruhr, Dickswall 2b III.

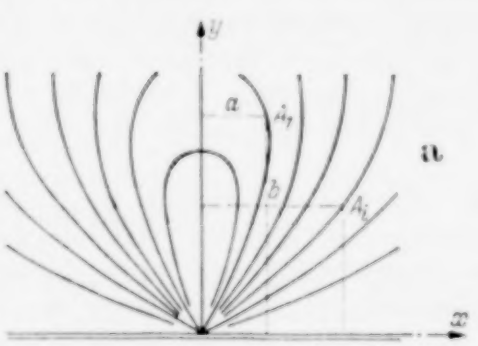
[1] *E. Kamke*, Math. Z. 45 (1939), S. 759; 46 (1940), S. 231; 48 (1942/43), S. 67.
[2] *H. Kneser*, Math. Z. 45 (1939), S. 590.
[3] Siehe Fußnote 1 von S. 111.
[4] *A. Traenkle*, Ing.-Arch. 1 (1930), S. 499.

Stützmomenteneinflußfelder durchlaufender elastischer Platten mit zwei frei drehbar gelagerten Rändern

Von **G. Hoeland.**

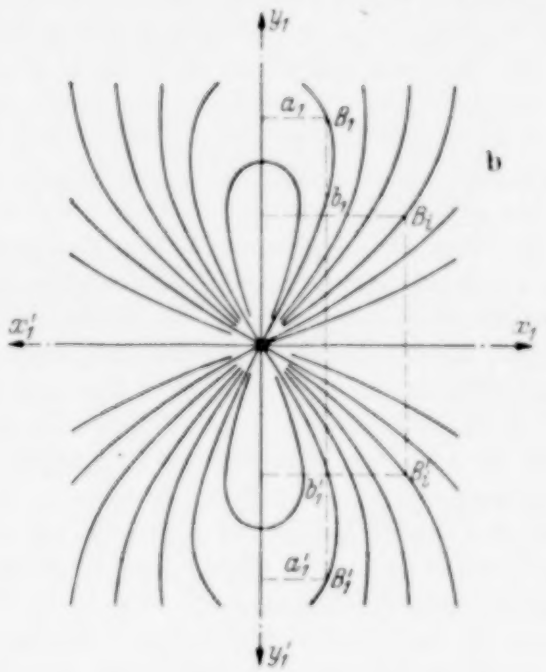
1. Einleitung. Einflußfelder elastischer Platten sind bereits auf die verschiedensten Arten ermittelt worden. Während u. a. *Bittner*[1] von bekannten Reihenansätzen ausging, bediente sich *Pucher*[2] der Singularitätenmethode. Alle diese Arbeiten behandeln jedoch im wesentlichen nur Einfeldplatten. Lediglich *Bittner* untersuchte näherungsweise den Einfluß der Nachbarfelder. In der vorliegenden Arbeit[3] soll nun ein Weg aufgezeigt werden, um die Einflußfelder für die Momente über den Zwischenstützen durchlaufender elastischer Platten mit zwei frei drehbar gelagerten Rändern zu ermitteln. Auf die Berechnung der Feldmomente durchlaufender Platten wird nicht eingegangen, da bei diesen der Einfluß der Durchlaufwirkung mit sehr guter Genauigkeit einfach bestimmt werden kann.

Ausgehend von der Singularität des Einflußfeldes für das Stützmoment am Querrand eines Plattenhalbstreifens wird die Singularität des Einflußfeldes für das Moment über der Zwischenstütze zweier aneinandergrenzender Halbstreifen gewonnen. Diese Singularität bildet dann den Ausgangspunkt für die Ermittlung der Einflußfelder symmetrischer und unsymmetrischer Plattenpaare mit starrer oder elastischer Zwischenstütze. Schließlich wird noch ein Weg angegeben, um auch für den Fall engliegender elastischer Zwischenstützen das Stützmomenteneinflußfeld zu ermitteln.



a

Abb. 1a. Es ist $a = a_1 = a_1'$, $b = b_1 = b_1'$.



b

Abb. 1b.

2. Das Einflußfeld für das Moment über der starren Zwischenstütze zweier aneinandergrenzender Halbstreifen. Wir betrachten zuerst das Stützmomenteneinflußfeld für einen am Querrand eingespannten Plattenhalbstreifen. Es läßt sich durch die Funktion

$$w = -2 \sum_{n=1,2\ldots}^{\infty} \frac{y}{l} e^{-\alpha y} \sin \alpha u \sin \alpha x \qquad (2.1)$$

darstellen, wobei w die Einflußordinaten, x und y die Koordinaten, u die Lage des Aufpunktes (der Punkt, für den das Einflußfeld bestimmt werden soll) in x-Richtung, l die Stützweite der Platte und

[1] *E. Bittner*, Momententafeln und Einflußflächen für kreuzweise bewehrte Eisenbetonplatten. Wien 1938.

[2] *A. Pucher*, Die Momenteneinflußfelder rechteckiger Platten. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 90. — *A. Pucher*, Ing.-Arch. 12 (1941), S. 77. — *A. Pucher*, Ing.-Arch. 14 (1943), S. 246.

[3] Gekürzte Fassung einer von der Fakultät für Bauwesen der Technischen Hochschule Hannover genehmigten Dissertation, Referent: Prof. Dr.-Ing. habil. *A. Pflüger*, Korreferent: Prof. Dr.-Ing. *W. Zerna*.

$a = n\pi/l$ eine von n abhängige Konstante bedeuten. Das Einflußfeld wurde zuerst von *Pucher*[1] angegeben. Abb. 1a ist eine skizzenhafte Darstellung der Umgebung des Aufpunktes als Höhenschichtlinienplan. Dabei sei der Halbstreifen an der x-Achse eingespannt.

Nun denken wir uns das Einflußfeld für das Stützmoment über der starren Zwischenstütze zweier aneinandergrenzender Halbstreifen. Die Platte soll dabei kontinuierlich durchlaufen. Abb. 1b möge wieder die Umgebung des Aufpunktes darstellen. An der Zwischenstütze (x-Achse) sei die Platte frei drehbar gelagert.

Betrachten wir eine Last im Punkte A auf dem Halbstreifen, so muß sie im Aufpunkt des Einflußfeldes das gleiche Moment hervorrufen wie zwei Lasten gleicher Größe in den entsprechenden Punkten B und B' der Durchlaufplatte im Aufpunkt dieser Durchlaufplatte. Außerdem muß eine Last im Punkte B das gleiche Moment im Aufpunkt hervorrufen wie eine andere Last P gleicher Art und Größe im Punkte B' des gleichen Einflußfeldes der Durchlaufplatte (vgl. Abb. 1b).

Das Einflußfeld für das Moment über der starren Zwischenstütze zweier aneinandergrenzender Halbstreifen hat also die gleiche Form, aber nur die halben Ordinaten wie das Stützmomenteneinflußfeld des am Querrand eingespannten Halbstreifens. Es läßt sich durch die Funktion

$$w = w_0 - \sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{y}{l} \cdot e^{-ay} \sin a\,u \sin a\,x \qquad (2{,}2)$$

darstellen und ist beiderseits der Zwischenstütze gleich. In Abb. 2 ist dieses Einflußfeld als Höhenschichtlinienplan angegeben.

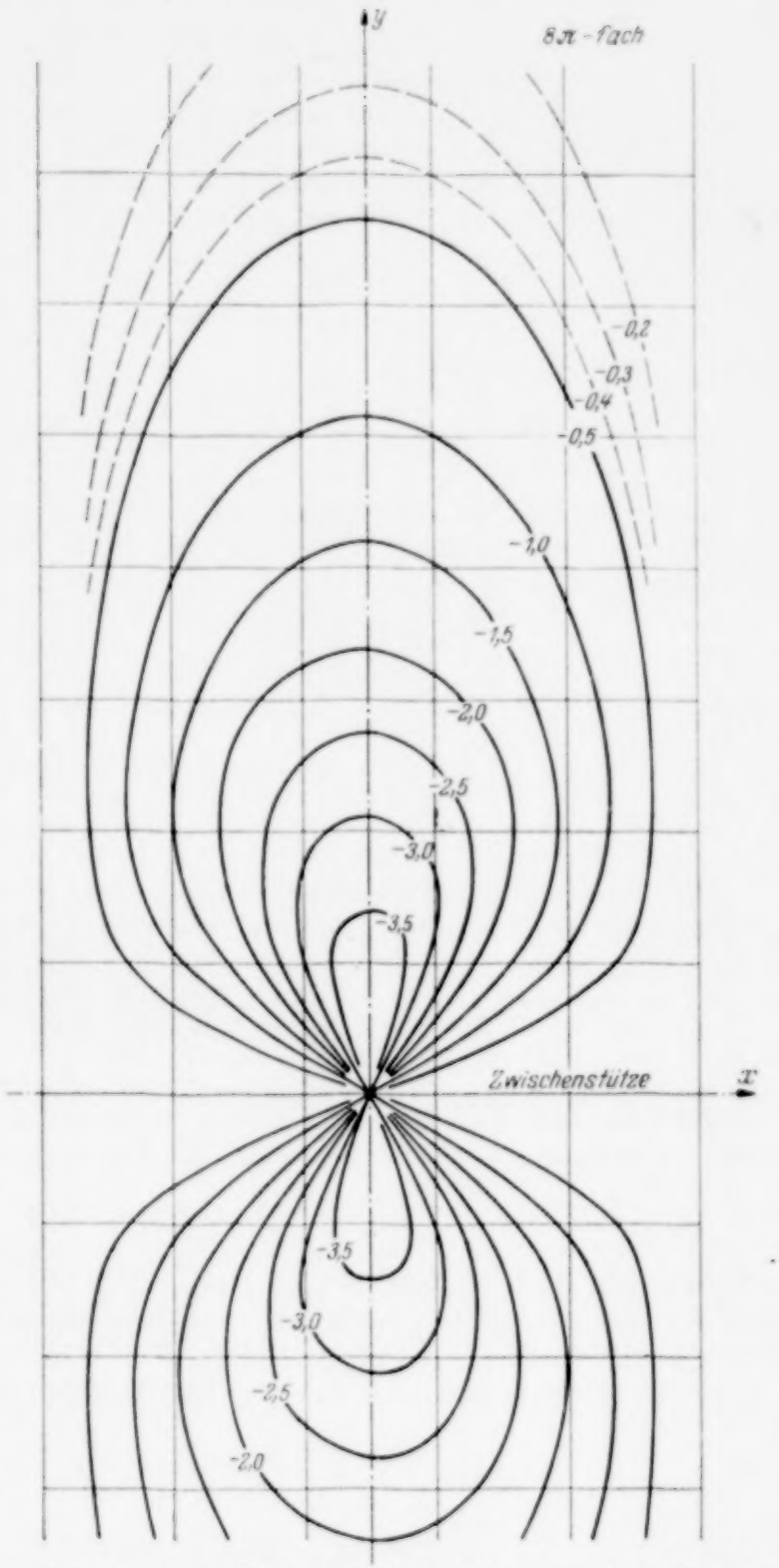


Abb. 2. m_y-Einflußfeld für die Mitte über der starren Zwischenstütze eines Plattenstreifens.

Die gleichen Überlegungen, die hier für das Einflußfeld der aneinandergrenzenden Plattenhalbstreifen angeführt sind, lassen sich analog für jedes andere symmetrische Plattenpaar und ebenso für die klassische wie für jede andere Singularität des Stützmomenteneinflußfeldes anstellen. Es ergibt sich daraus allgemein, daß die Einflußfelder für die Momente über starren Zwischenstützen symmetrischer durchlaufender Plattenpaare aus den Stützmomenteneinflußfeldern der entsprechenden eingespannten Einfeldplatten gewonnen werden können. In vielen praktisch vorkommenden Fällen wird man, wenn die Seitenverhältnisse zweier aneinandergrenzender Platten nicht zu sehr voneinander abweichen, mit guter Näherung auch für unsymmetrische Platten entsprechend vorgehen können.

3. Das Einflußfeld für das Moment über der Zwischenstütze zweier aneinandergrenzender Rechteckplatten. In Abschnitt 2 wurde das Einflußfeld für das Stützmoment zweier aneinandergrenzender

[1] *A. Pucher*, Einflußfelder elastischer Platten, Tafel 9. Wien 1951.

Technische Physik in Einzeldarstellungen

Herausgegeben von **W. Meissner**

Soeben erschien Band 11 November 1955

Ferroelektrika

von

Dr. phil. Herbert Sachse
St. Marys, Pennsylvania

Mit 129 Abbildungen. VII, 172 Seiten Gr.-8°. 1955. Ganzleinen DM 28.—

Im Jahre 1949 versuchte der Verfasser, das damalige Schrifttum über die ungewöhnlichen dielektrischen Eigenschaften von $BaTiO_3$, das wegen seiner vielfachen Analogie zu ferromagnetischen Stoffen als Ferroelektrikum bezeichnet wurde, in einem Sammelbericht zusammenzufassen. Dieser Bericht erschien zu einer Zeit, in der sich der internationale Austausch wissenschaftlichen Gedankengutes erst langsam wieder einzuspielen begann und viele sich nur schwierig oder gar nicht mit der Fachliteratur vertraut machen konnten. Diesem Umstand war wohl in erster Linie das unerwartete große

---

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
J. F. BERGMANN / MÜNCHEN

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Interesse zuzuschreiben, das dieser Bericht fand. Die Zahl der vorhandenen Sonderdrucke war nach seiner Veröffentlichung so schnell vergriffen, daß die Abfassung eines zweiten, auf das gesamte Gebiet der neuen Stoffe mit ferroelektrischen Eigenschaften ausgedehnten Berichtes geplant wurde. Es zeigte sich jedoch sehr bald, daß das schnell wachsende Schrifttum eines weiteren Rahmens bedürfe. Durch äußere Umstände hat sich die Fertigstellung des Manuskriptes stark verzögert. Andererseits darf wohl gesagt werden, daß die verspätete Fertigstellung dem Inhalt des Buches zugute gekommen ist, da eine Reihe wichtiger neuer Arbeiten berücksichtigt werden konnte.

Bei einem noch völlig in der Entwicklung begriffenen Gebiet ist es schwer und auch gefährlich, durch scharfe Kritik das vorliegende Material in Gutes und Schlechtes zu trennen. Es erschien wichtiger, möglichst die gesamte Literatur, insbesondere auch die ausländische, so ausführlich zu berücksichtigen, daß der Leser des Buches die Möglichkeit hat, selbst Stellung zu den verschiedenen Auffassungen zu nehmen und unter Verwertung alles Vorhandenen weiter vorzudringen, ohne überall auf die oft schwer zugänglichen Originalarbeiten zurückgreifen zu müssen.

Das ältere Gebiet der Seignetteelektrizität dagegen ist nur kurz behandelt worden, da hierfür eine Reihe ausgezeichneter Zusammenfassungen vorliegt.

INHALTSVERZEICHNIS

I. Einleitung

II. Seignetteelektrische Kristalle

1. Das Seignettesalz KNa-Tartrat + $4H_2O$
2. Primäre Phosphate und Arsenate
3. Theoretische Betrachtungen

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
J. F. BERGMANN / MÜNCHEN

III. Ferroelektrische Titanate

1. Vorgeschichte
2. Herstellungsverfahren
   Erste Versuche. Systematische Untersuchungen. Technische Herstellung und Prüfnormen in USA.
3. Patentliteratur allgemein
   Stoffpatente. Verfahrenspatente.
4. Elektrische Eigenschaften allgemein
   $BaTiO_3$. $BaTiO_3$ mit nichtstöchiometrischer Zusammensetzung (System $xBaO \cdot yTiO_2$). Andere Titanate. Homogene Mischphasen mehrerer Titanate. Systeme mit Zirkonaten und Stannaten. Neue Ferroelektrika.
5. Spezielle elektrische Eigenschaften
   Feldabhängigkeit. Frequenzabhängigkeit. Druckabhängigkeit. Zeitabhängigkeit. Piezoeffekt und Elektrostriktion.
6. Elektrische Festigkeit und Leitfähigkeit
   Elektrische Festigkeit. Elektrische Leitfähigkeit.
7. Herstellung von Einkristallen und elektrische Untersuchungen an ihnen
   Erste Versuche zur Herstellung von Einkristallen. Untersuchungen in USA und in der Schweiz. Untersuchungen in der UdSSR. Einkristalle anderer ferroelektrischer Verbindungen.
8. Strukturuntersuchungen
   Titanate, Zirkonate und Stannate. Niobate, Tantalate, Cerate und Scandate. Titanate der seltenen Erden. Binäre Systeme. Strukturänderungen bei den unteren Umwandlungspunkten. Theoretische Strukturbetrachtungen.
9. Optische Eigenschaften
   Experimentelle Ergebnisse. Theoretische Betrachtungen über das optische Verhalten.
10. Allgemeine Theorie
    Übersicht. Theorie von Mason und Matthias. Theorie von Devonshire. Sauerstoffverschiebungstheorie von Jaynes. Theorie von Slater. Lorentz-Faktor und 4 $\pi/3$-Katastrophe. Strukturchemische Vorstellungen. Antiferroelektrizität.
11. Anwendungen
    Ferroelektrika als dielektrische Werkstoffe. Dielektrische Verstärker. Frequenzvervielfacher. Ferroelektrika als elektromechanische Wandler. Künstliches Gedächtnis. Ferroelektrika als thermische Wandler.

Literaturverzeichnis

Namenverzeichnis

Sachverzeichnis

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
J. F. BERGMANN / MÜNCHEN

Früher erschienen:

6. Band: **Hochstromkohlebogen**

Physik und Technik einer Hochtemperatur-Bogenentladung. Von Professor Dr. **Wolfgang Finkelnburg.** Mit 132 Abbildungen. VIII, 221 Seiten Gr.-8°. 1948. DM 22,50; Ganzleinen DM 26,50

7. Band: **Grundlagen der Höchstfrequenztechnik**

Von Dr.-Ing. **F. W. Gundlach,** Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt, Direktor des Instituts für Fernmeldetechnische Geräte und Anlagen. Mit 189 Textabbildungen. VIII, 499 Seiten Gr.-8°. 1950. DM 48,—; Ganzleinen DM 52,—

8. Band: **Wärmeübertragung im Gegenstrom, Gleichstrom und Kreuzstrom**

Von Dr.-Ing. **Helmuth Hausen,** o. Professor an der Technischen Hochschule Hannover. Mit 230 Textabbildungen. XII, 464 Seiten Gr.-8°. 1950. DM 69,—; Ganzleinen DM 73,—

9. Band: **Kleinste Drucke, ihre Messung und Erzeugung**

Von Dr. **Rudolf Jaeckel,** apl. Professor der Physik an der Universität Bonn und Leiter der Hochvakuumabteilung der Firma E. Leybold's Nachf., Köln-Bayenthal, unter Mitarbeit von Dr. Helmut Schwarz und Dr. Elisabeth Schüller. Mit 301 Textabbildungen. X, 302 Seiten Gr.-8°. 1950. DM 39,60; Ganzleinen DM 43,60

10. Band: **Die elektromagnetische Schirmung in der Fernmelde- und Hochfrequenztechnik**

Von Dr. phil. **Heinrich Kaden,** Oberingenieur der Siemens & Halske AG. Mit 145 Textabbildungen. VIII, 274 Seiten Gr.-8°. 1950. DM 38,—; Ganzleinen DM 42,—

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
J. F. BERGMANN / MÜNCHEN

11. 55. 550.

Plattenhalbstreifen hergeleitet. Die sehr einfache Singularität dieses Einflußfeldes erfüllt bereits die Randbedingungen an den Längsrändern, wenn die Platte an diesen frei drehbar gelagert und starr gestützt ist, sowie die Kontinuitätsbedingungen

$$\frac{\partial^2 w_{links}}{\partial y^2_{links}} = \frac{\partial^2 w_{rechts}}{\partial y^2_{rechts}}, \qquad \frac{\partial w_{links}}{\partial y_{links}} = -\frac{\partial w_{rechts}}{\partial y_{rechts}}$$

an der Zwischenstütze. Damit ist die Ermittlung der Einflußfelder für das Moment an der Zwischenstütze zweier aneinandergrenzender Reckteckplatten auf die Erfüllung der zusätzlichen Randbedingungen an den der Zwischenstütze gegenüberliegenden Rändern zurückgeführt, wenn man das Einflußfeld (2,2) als Singularität benutzt. Die Erfüllung dieser zusätzlichen Randbedingungen erfolgt durch biharmonische Funktionen. Dabei ist es auch hier zweckmäßig, solche Funktionen zu wählen, die für sich bereits möglichst viele Randbedingungen erfüllen, also Funktionen von der Form

$$\bar{w} = \sum_{n=1,2\,..}^{\infty} f_{(y,n)} \sin a\, x \tag{3,1}$$

Funktionen dieser Art sind:

$$\bar{w} = \sum_{n=1,2\,..}^{\infty} (A_{in} \operatorname{Cof} a\, y + B_{in}\, y \operatorname{Sin} a\, y + C_{in} \operatorname{Sin} a\, y + D_{in}\, y \operatorname{Cof} a\, y) \sin a\, x\,. \tag{3,2}$$

Dabei bezeichnen i das Plattenfeld und n das Reihenglied.

Für die Randquerkraft ergibt sich mit N als Plattensteifigkeit unter Vernachlässigung der Querkontraktion

$$q_y = -N\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\, \partial y}\right),$$

oder

$$\left.\begin{aligned} q_y = -N \sum_{n=1,2\,..}^{\infty} [&A_{in}(-a^3) \operatorname{Sin} a\, y + B_{in}(a^2 \operatorname{Sin} a\, y - a^3\, y \operatorname{Cof} a\, y) \\ &+ C_{in}(-a^3) \operatorname{Cof} a\, y + D_{in}(a^2 \operatorname{Cof} a\, y - a^3\, y \operatorname{Sin} a\, y)] \sin a\, x\,. \end{aligned}\right\} \tag{3,3}$$

Die Randbedingungen an den Gegenrändern können beliebig vorgegeben sein. Haben wir jeweils einen eingespannten Rand im Abstande $y_1 = b_1$ und $y_2 = b_2$, so lauten sie

$$w_1 = 0 \quad \text{für} \quad y_1 = 0 \quad \text{und} \quad y_1 = b_1\,, \tag{3,4), (3,5}$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial y_1} = 0 \quad \text{für} \quad y_1 = b_1 \tag{3,6}$$

für die eine Rechteckplatte mit $w_1 = w_{01} + \bar{w}_1$ und

$$w_2 = 0 \quad \text{für} \quad y_2 = 0 \quad \text{und} \quad y_2 = b_2\,, \tag{3,7), (3,8}$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial y_2} = 0 \quad \text{für} \quad y_2 = b_2 \tag{3,9}$$

für die zweite Rechteckplatte mit $w_2 = w_{02} + \bar{w}_2$. Dabei bezeichnen w_1 und w_2 die Einflußordinaten in den Feldern 1 und 2, w_{01} und w_{02} die Singularteile [entsprechend (2,2)] sowie $\bar{w}_1$ und $\bar{w}_2$ die Regularteile [entsprechend (3,2)] in diesen Feldern.

An der Zwischenstütze lauten die Kontinuitätsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial y_1} &= -\frac{\partial w_2}{\partial y_2} \quad \text{für} \quad y_1 = y_2 = 0 \\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^2} &= \frac{\partial^2 w_2}{\partial y_2^2} \quad \text{für} \quad y_1 = y_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{mit} \quad \left\{\begin{aligned} u_1 &= l - u_2\,, \qquad (3,10) \\ x_1 &= l - x_2\,. \qquad (3,11) \end{aligned}\right.$$

Die Randbedingungen und die Kontinuitätsbedingungen werden für jedes Reihenglied n einzeln erfüllt. Die Singularität selbst erfüllt die Bedingung (3,10) nicht für jedes Reihenglied einzeln sondern nur für die ganze Summe. Bei der Ermittlung der Konstanten genügt es aber, bei dieser Bedingung die Regularteile alleine zu berücksichtigen.

Die Randbedingungen (3,4) und (3,7) führen auf $A_{in} \equiv 0$, da die Singulärität für sich bereits die Randbedingung erfüllt und die übrigen Funktionen (die Glieder mit B_{in}, C_{in} und D_{in}) ebenfalls für $y_1 = y_2 = 0$ schon Null sind. Damit ist für jeden Wert n ein System von 6 Gleichungen mit 6 Unbekannten zu lösen.

Für den Sonderfall $u = \frac{1}{2} l$ fallen die Glieder mit geradem n heraus und es sind nurmehr die Konstanten für $n = 1, 3, 5, \ldots$ zu berechnen. Für den Fall $b_1 = \frac{1}{2} l$ und $b_2 = l$ wurde das Einflußfeld berechnet. Es ergaben sich dabei folgende Werte für die Konstanten ($u = \frac{1}{2} l$):

$$
\begin{aligned}
B_{11} = B_{21} &= \quad 0{,}2364/l\,, \\
C_{11} &= \quad 0{,}2310\,, \\
D_{11} &= -\,0{,}5577/l\,, \\
C_{21} &= \quad 0{,}0297\,, \\
D_{21} &= -\,0{,}2614/l\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{13} = B_{23} &= \quad 0{,}558 \cdot 10^{-3}/l\,, \\
C_{13} &= \quad 0{,}762 \cdot 10^{-3}\,, \\
D_{13} &= -\,1{,}921 \cdot 10^{-3}/l\,, \\
C_{23} &= -\,0{,}558 \cdot 10^{-3}\,, \\
D_{23} &= -\,0{,}022 \cdot 10^{-6}/l\,.
\end{aligned}
$$

Das entsprechende Einflußfeld ist in Abb. 3 dargestellt.

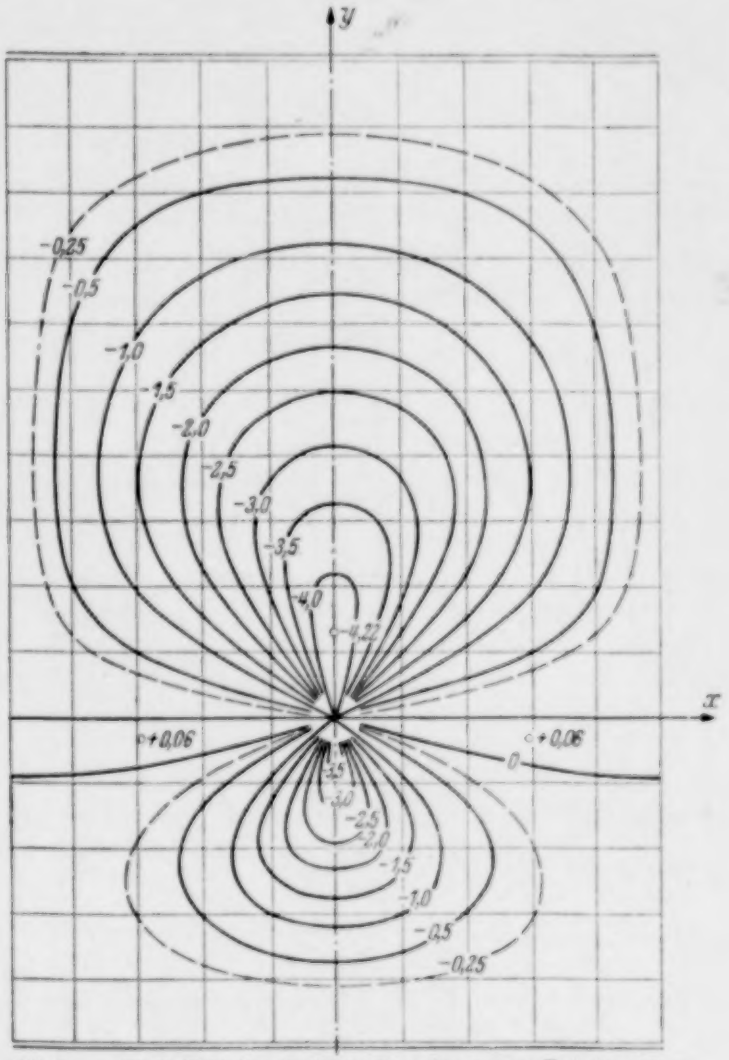


Abb. 3. m_y-Einflußfeld für die Mitte über der starren Zwischenstütze einer durchlaufenden Platte. Seitenverhältnis 1:1 und 1:0,5.

Grundsätzlich der gleiche Weg ist einzuschlagen, wenn das Einflußfeld für eine Zweifeldplatte zu bestimmen ist, bei der ein oder beide Gegenräder nicht eingespannt sondern frei drehbar gelagert sind. Es sind dann lediglich die entsprechenden Randbedingungen zu erfüllen.

4. Einflußfeld für das Moment über einer einzelnen elastischen Zwischenstütze. Haben wir einen Plattenstreifen mit einer einzelnen elastischen Querstütze und wollen wir das Einflußfeld für das Moment über dieser Querstütze ermitteln, so gehen wir am besten wieder vom Einflußfeld der aneinandergrenzender Halbstreifen (Abb. 2) aus. Für dieses Einflußfeld gilt (2,2).

Die beiden Seiten üben auf die zuerst starr angenommene Zwischenstütze eine Belastung aus, die gleich der Randquerkraft der beiden Felder ist. Da jetzt die Stütze elastisch sein soll, erleidet sie unter diesen Randquerkräften q_y eine Verformung, der die Platte wiederum anzugleichen ist. Die Randquerkraft

$$q_y = \frac{1}{2} p = -\,N\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2\,\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right) \qquad (\nu = 0)$$

wirkt auf beiden Seiten gleichgerichtet, ist also zu addieren.

An der Zwischenstütze ergeben sich die folgenden Rand- und Kontinuitätsbedingungen:

$$w_{Qu.Tr.} = w_1 = w_2 \qquad \text{für} \quad y_1 = y_2 = 0\,, \qquad (4{,}1),\ (4{,}2)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial y_1} = -\,\frac{\partial w_2}{\partial y_2} \qquad \text{für} \quad y_1 = y_2 = 0\,, \qquad (4{,}3)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial y_2^2} \qquad \text{für} \quad y_1 = y_2 = 0\,. \qquad (4{,}4)$$

Dazu kommen noch die Randbedingungen an den der Zwischenstütze gegenüberliegenden Rändern, wenn solche vorhanden sind. Die Stützungen an diesen Rändern können elastisch oder starr sein.

Betrachten wir den Sonderfall, daß das Einflußfeld für die Mitte über der Querstütze zweier aneinandergrenzender Halbstreifen gesucht ist (im anderen Fall wäre analog zu Abschnitt **2** und **3** zu verfahren), so wird $A_n = -\,C_n$ und $B_n = -\,D_n$ (der Index i kann hier entfallen) und daraus

$$w = \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} (A_n\, e^{-\alpha y} + D_n\, y\, e^{-\alpha y}) \sin \alpha\, x\,. \qquad (4{,}5)$$

Für den elastischen Querträger ist $p = 2\,(q_{y\,o} + q_{\bar{y}})$. Dabei stellen $q_{y\,o}$ den Anteil aus der Singularität w_o und $q_{\bar{y}}$ den Anteil aus dem Regularteil w dar. Durch Einsetzen der entsprechenden Ableitungen erhält man für $y = 0$

$$p = -2\,N \sum_{n=1,3\,..}^{\infty} \left(-\frac{a^2}{l} \sin a\,u + A_n\,a^3 + D_n\,a^2 \right) \sin a\,x \tag{4,6}$$

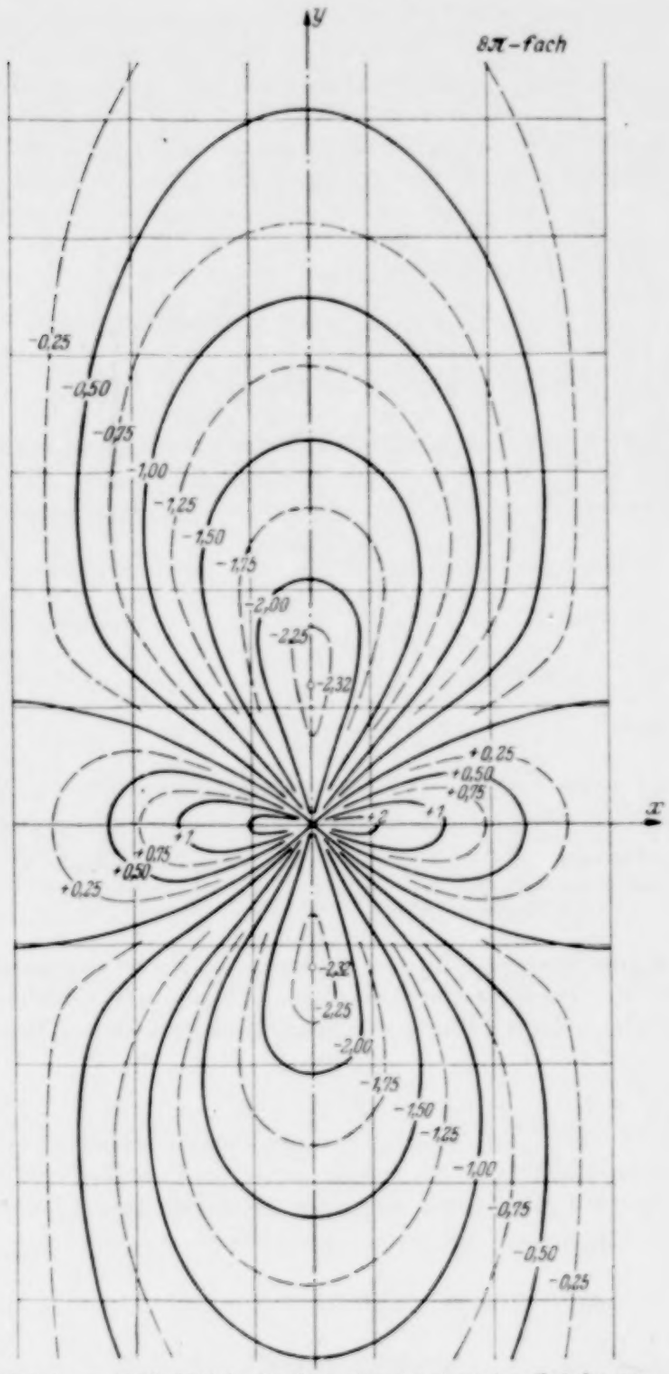


Abb. 4. m_y-Einflußfeld für die Mitte über der elastischen Zwischenstütze eines Plattenstreifens.

und aus der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 w_{Qu.\,Tr.}}{\partial x^4} = \frac{p}{E\,J_{Qu.\,Tr.}}$$

der Biegelinie des Querträgers

$$\frac{\partial^4 w_{Qu.\,Tr.}}{\partial x^4} = \frac{-2N}{E\,J_{Qu.\,Tr.}} \sum_{n=1,3\,..}^{\infty} \left(-\frac{a^2}{l} \sin a\,u + A_n\,a^3 + D_n\,a^2 \right) \sin a\,x\,. \tag{4,7}$$

Durch Integration ergibt sich aus dieser Differentialgleichung die Biegelinie des Querträgers, wenn die beiden Längsränder der Platte (und damit auch die Enden des Querträgers) frei drehbar gelagert sind, zu

$$w_{Qu.\,Tr.} = \frac{-2\,N}{E\,J_{Qu.\,Tr.}} \sum_{n=1,3\,..}^{\infty} \left(\frac{-1}{a^2 l} \sin a\,u + A_n \frac{1}{a} + D_n \frac{1}{a^2} \right) \sin a\,x$$

und mit $a = n\,\pi / l$

$$w_{Qu.\,Tr.} = \frac{-2\,N l}{E\,J_{Qu.\,Tr.}} \sum_{n=1,3\,..}^{\infty} \left(\frac{-1}{n^2\,\pi^2} \sin a\,u + A_n \frac{1}{n\,\pi} + D_n \frac{l}{n^2\,\pi^2} \right) \sin a\,x\,. \tag{4,8}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$2\,N l / E\,J_{Qu.\,Tr.} = \gamma\,,$$

so erhalten wir aus (4,8)

$$w_{Qu.\,Tr} = -\gamma \sum_{n=1,3\,..}^{\infty} \left(\frac{-1}{n^2\,\pi^2} \sin a\,u + \frac{A_n}{n\,\pi} + \frac{D_n}{n^2\,\pi^2} l \right) \sin a\,x\,.$$

Die Randbedingung (4,1) liefert

$$-\gamma \sum_{n=1,3\,..}^{\infty} \left(\frac{-1}{n^2\,\pi^2} \sin a\,u + \frac{A_n}{n\,\pi} + \frac{D_n}{n^2\,\pi^2} l \right) \sin a\,x - \sum_{n=1,3\,..}^{\infty} A_n \sin a\,x = 0\,. \tag{4,9}$$

Dabei ist die Bedingung (4,2) selbständig miterfüllt, da wir vom symmetrischen Plattenfeld ausgingen. Für den gleichen Sonderfall ergibt sich aus (4,3), wenn wir berücksichtigen, daß die Singularität diese Kontinuitätsbedingung bereits für sich erfüllt,

$$\sum_{n=1,3\,..}^{\infty} (-A_n\,a + D_n) \sin a\,x = 0 \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{für} \quad y = 0 \right)$$

und damit die einfache Bedingungsgleichung

$$A_n\,a = D_n\,. \tag{4,10}$$

Setzen wir nun in (4,9) ein, so erhalten wir

$$\sum_{n=1,3\,..}^{\infty}\left(\frac{\gamma}{n^2\pi^2}\sin a\,u - 2\,A_n\frac{\gamma}{n\pi}\right)\sin a\,x - \sum_{n=1,3\,..}^{\infty}{}' A_n \sin a\,x = 0$$

$$A_n = \frac{\gamma \sin a\,u}{n^2\pi^2(1+2\gamma/n\pi)} = \frac{\gamma \sin a\,u}{(n\pi+2\gamma)\,n\pi} \tag{4,11}$$

sowie mit (4,10)

$$D_n = \frac{\gamma \sin a\,u}{(n\pi+2\gamma)\,l} \tag{4,12}$$

als Bedingungsgleichungen für A_n und D_n. In Abb. 4 ist ein solches Einflußfeld für $\gamma = 1$ dargestellt.

Der Grenzfall eines vollkommen weichen Querträgers ($E J_{Qu.Tr.} = 0$) liefert $\gamma = \infty$. Damit ergibt sich für w entsprechend $w = w_0 + \bar{w}$ [Gleichung (2,2) und (4,5)]

$$w = \sum_{n=1,3\,..}^{\infty}\left(-\frac{y}{l}\sin a\,u + A_n + D_n\,y\right)e^{-a\,y}\sin a\,x \tag{4,13}$$

mit

$$\lim_{\gamma\to\infty}\left[A_n = \frac{\gamma \sin a\,u}{n\pi\,(n\pi+2\gamma)}\right] = \frac{\sin a\,u}{2\,n\pi}$$

und

$$\lim_{\gamma\to\infty}\left[D_n = \frac{\gamma \sin a\,u}{l(n\pi+2\gamma)} = \frac{\sin a\,u}{2\,l}\right.$$

$$w = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1,3\,..}^{\infty}(1-a\,y)\,\frac{1}{n}\,e^{-a\,y}\sin a\,u\sin a\,x\,. \tag{4,14}$$

Die Gleichung (4,14) stimmt, abgesehen vom zweiten Vorzeichen, mit der von *Pucher*[1] angegebenen Lösung für das Einflußfeld m_y für die Mitte des Plattenstreifens überein. Wir erhalten also im Falle des Grenzüberganges $E J_{Qu.Tr.} \to 0$ das Einflußfeld des Plattenstreifens.

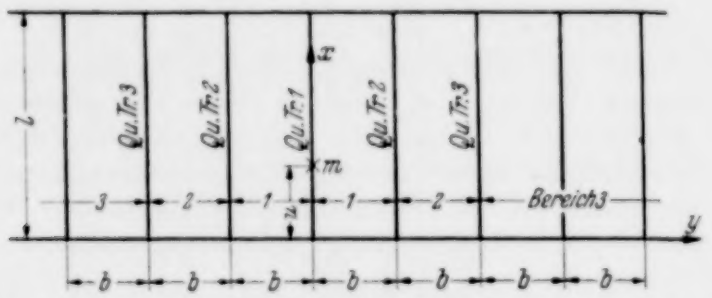


Abb. 5. m bezeichnet den Punkt, für den das Einflußfeld ermittelt werden soll.

5. Einflußfeld für das Moment über einer von vielen engliegenden elastischen Zwischenstützen. In diesem Abschnitt soll ein Weg aufgezeigt werden, um angenähert das Einflußfeld für das Moment über einer elastischen Zwischenstütze zu ermitteln, wenn in gewissen Abständen weitere elastische Zwischenstützen vorhanden sind (orthotrope Platte mit einer Schar Träger). Die Abb. 5 möge ein solches System im Grundriß darstellen. Das Einflußfeld soll für den Punkt m ermittelt werden.

Zur Berechnung des Einflußfeldes werden die ersten beiden Plattenfelder (Bereiche *1* und *2* in Abb. 5) beiderseits des Querträgers, auf dem der Aufpunkt m liegt, als isotrope Platte betrachtet. Für sie gilt also die Differentialgleichung $\Delta\Delta w = p/N$ (mit $p = 0$). Der weitere Bereich (Bereich *3* nach Abb. 5) wird als Kontinuum betrachtet. Für diesen Bereich möge die *Hubersche*[2] Differentialgleichung

$$B_x\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,H\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + B_y\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p\,. \tag{5,1}$$

(auch hier ist $p = 0$) Gültigkeit haben. Es bedeuten darin B_x und B_y die Biegesteifigkeiten in den beiden Koordinatenrichtungen und H die Drillsteifigkeit (im Sonderfall $\nu = 0$) der orthotropen Platte.

[1]) *A. Pucher*, Ing.-Arch. 14 (1943) S. 259.
[2]) Vgl. *K. Girkmann*, Flächentragwerke, S. 292. Wien 1954.

Die einzelnen Plattenfelder sind an den Rändern $x=0$ und $x=l$ starr gestützt und frei drehbar gelagert. An den Zwischenstützen sind sie elastisch gestützt und in die Nachbarfelder elastisch eingespannt. Am ersten Plattenfeld wirkt die Singularität (2,2). Sie ruft an den Querrändern Verformungen hervor, denen die Nachbarfelder anzupassen sind. Dabei müssen die folgenden Rand- und Kontinuitätsbedingungen erfüllt werden: Über dem Querträger 1 ($y_1 = 0$)

$$\frac{\partial w_{Pl.1}}{\partial y_1} = 0 \,, \tag{5,2}$$

$$w_{Platte\,1} = w_{Qu.Tr.1} \tag{5,3}$$

wobei die Kontinuitätsbedingung $\frac{\partial^2 w_{Pl.li}}{\partial y_{li}^2} = \frac{\partial^2 w_{Pl.re}}{\partial y_{re}^2}$ für $y_1 = 0$ infolge des der Symmetrie entsprechenden Ansatzes gleich miterfüllt ist; über dem Querträger 2 ($y_1 = b$, $y_2 = 0$)

$$w_1 = w_2 \,, \tag{5,4}$$

$$w_2 = w_{Qu.Tr.2} \,, \tag{5,5}$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial y_2} = \frac{\partial w_1}{\partial y_1} \,, \tag{5,6}$$

$$N_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial y_2^2} = N_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^2} \text{ (meist ist } N_1 = N_2 = B_y) : \tag{5,7}$$

über dem Querträger 3 ($y_2 = b$, $y_3 = 0$)

$$w_2 = w_3 \,, \tag{5,8}$$

$$w_3 = w_{Qu.Tr.3} \,, \tag{5,9}$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial y_2} = \frac{\partial w_3}{\partial y_3} \,, \tag{5,10}$$

$$N_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial y_2^2} = B_y \frac{\partial^2 w_3}{\partial y_3^2} \,. \tag{5,11}$$

Zur Erfüllung dieser Rand- und Kontinuitätsbedingungen werden wieder entsprechende Funktionen und deren Ableitungen benötigt. w_1 besteht wieder aus einem Singularteil und einem Regularteil, w_2 und w_3 dagegen bestehen nur aus Regularteilen. Singular- und Regularteile der Felder *1* und *2* haben die gleiche Form wie im Abschnitt **3**. Entsprechend können sie auch durch die gleichen Funktionen dargestellt werden. Die Erfüllung der *Huber*schen[1] Differentialgleichung (5,1) der orthotropen Platte im Bereich *3* dagegen erfolgt durch Funktionen, wie sie bereits von *Cornelius*[2] benutzt wurden:

$$\left.\begin{aligned} w_3 &= \sum_{n=1,2\ldots}^{\infty} (A_{3n} \cos \varphi \alpha y_3 + B_{3n} \sin \varphi \alpha y_3) e^{-\vartheta \alpha y_3} \sin a x \\ \text{mit } \alpha &= a \sqrt[4]{B_x/B_y} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} \vartheta \\ \varphi \end{matrix} \Big| = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{H}{\sqrt{B_x B_y}}\right)}, \quad \mu = \frac{H}{\sqrt{B_x B_y}} \,. \end{aligned}\right\} \tag{5,12}$$

Für die Randquerkraft q_y ergibt sich bei der orthotropen Platte[2]

$$q_y = - B_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (4\,C + \nu_x B_y) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$$

und mit $\nu_x = \nu_y = 0$

$$q_y = - B_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - 2\,H \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \,.$$

Setzen wir die entsprechenden Ableitungen in die Gleichung für q_y ein, so wird für den Sonderfall $y = 0$

$$\bar{q}_{y3} = \sum_{n=1,2\ldots}^{\infty} [A_{3n}(-\vartheta\mu - 2\,\vartheta\varphi^2) + B_{3n}(\mu\varphi - 2\,\vartheta^2\varphi)]\, a^3 \sqrt[4]{B_x^3 B_y} \sin a x \,.$$

[1] K. *Girkmann*, Flächentragwerke, S. 292. Wien 1954.
[2] *W. Cornelius*, Der Stahlbau 21 (1952), S. 21, 43 und 60.

Durch Einsetzen der Ableitungen in die Randbedingungen (5,2) bis (5,11) erhalten wir die Bedingungsgleichungen zur Ermittlung der Konstanten A_{in}, B_{in}, C_{in} und D_{in}. Das Einflußfeld setzt sich dann im Bereich *1* aus dem Singular- und dem Regularteil zusammen während es in den Bereichen *2* und *3* durch die Regularteile alleine dargestellt wird.

6. Vergleich mit dem Näherungsverfahren der DIN 1075. In der DIN 1075 (Fassung vom August 1951) wird gefordert, Fahrbahnplatten nach der Plattentheorie zu berechnen. Für die durchlaufenden Platten werden dabei Näherungsverfahren angegeben. Nun ist es für die Praxis von Interesse zu erfahren, wie genau diese Näherungsverfahren sind. Es wurden deshalb die Stützmomenteneinflußfelder für symmetrische Plattenpaare verschiedener Seitenverhältnisse l_x/l_y ausgewertet und mit den Werten verglichen, die sich nach den Verfahren der DIN 1075 (ohne Faktor α nach Tabelle 3 der DIN 1075) ergeben. Die nach dem Näherungsverfahren ermittelten Stützmomente M_E waren bis zu 75% größer als die nach dem exakten Verfahren ermittelten Werte M_{St} der Durchlaufplatte.

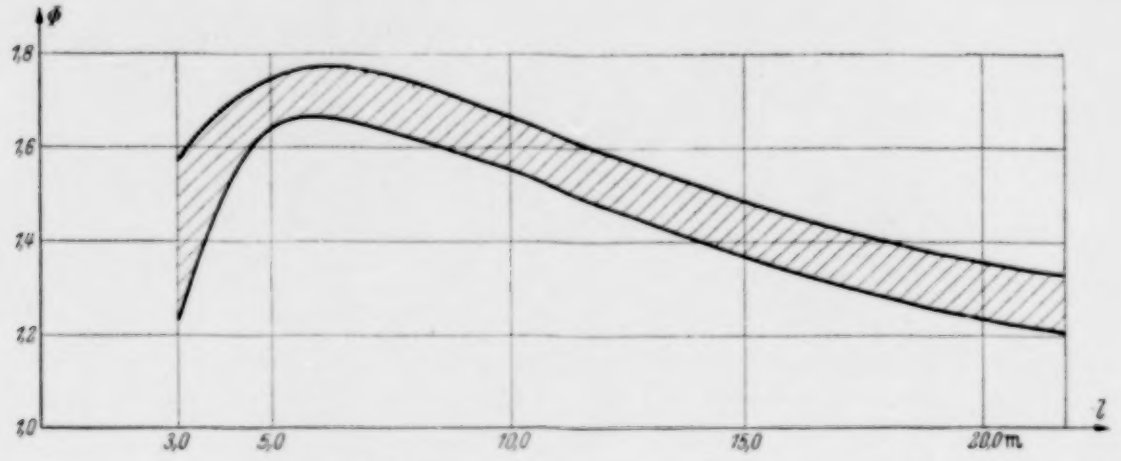


Abb. 6. $\Phi = \frac{M_E}{M_{St}}$, wobei M_E = Einspannmoment der Einfeldplatte, M_{St} = Stützmoment der Zweifeldplatte; Brückenklasse 60.

Die Abb. 6 gibt einen Überblick über die Größe der Abweichungen in Abhängigkeit von der Stützweite der Platten. Alle ermittelten Werte für die Brückenklasse 60 lagen innerhalb des schraffierten Bereiches der Abb. 6. Die Darstellung zeigt, daß die Abweichungen bei Stützweiten von 4 bis 10 m besonders groß sind. Es dürfte deshalb zweckmäßig sein, die in der Vorschrift angeführten Näherungsverfahren zu ergänzen und die Vorschrift entsprechend abzuändern[1].

7. Schlußbemerkung. Es wurden Verfahren gezeigt, um Stützmomenteneinflußfelder durchlaufender elastischer Platten mit zwei frei drehbar gelagerten Rändern zu berechnen. Ausgehend vom Einflußfeld des Plattenhalbstreifens wurden die Gleichungen zur Ermittlung der Einflußfelder über einer starren Zwischenstütze aufgestellt und ein solches Einflußfeld berechnet. Bei der Ermittlung dieser Einflußfelder spielt es für den Rechenaufwand grundsätzlich keine Rolle, ob die Platten an den Gegenrändern frei drehbar gelagert, elastisch oder fest eingespannt, elastisch oder starr gestützt sind oder auch freie Gegenränder haben. Es sind nur jeweils die entsprechenden Randbedingungen zu erfüllen.

Für den Sonderfall der zur starren Zwischenstütze symmetrischen Plattenfelder ergibt sich eine vereinfachte Lösung derart, daß lediglich die Ordinaten der Einflußfelder der entsprechenden eingespannten Platten zu halbieren und beiderseits der Zwischenstütze aufzutragen sind. Dieses Verfahren kann jedoch nicht angewandt werden, wenn die Platte mit einer verdrehungssteifen Zwischenstütze fest verbunden ist.

Weiter wurden Lösungen für die Ermittlung von Einflußfeldern für die Stützmomente über elastischen Zwischenstützen angegeben. Dabei wurden sowohl einzelne als auch engliegende Zwischenstützen berücksichtigt.

[1] Näheres hierüber ist in der Dissertation des Verfassers zu finden.

Auf die Ermittlung der Einflußfelder für die Feldmomente durchlaufender Platten wurde nicht eingegangen, da deren Ermittlung keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bringt. Es sind lediglich die einzelnen Plattenfelder durch Befriedigung der Kontinuitätsbedingungen an den Zwischenstützen zu verkoppeln, während bei den Stützmomenten die Singularitäten mit in die Kontinuitätsbedingungen eingehen.

Zum Schluß wurden Vergleiche mit den bisherigen Näherungsverfahren geführt. Dabei wurde gezeigt, daß sie im allgemeinen, besonders bei großen Einzellasten, zu ungünstige Werte liefern. Es wurde deshalb auf einen Abänderungsvorschlag für die DIN 1075 hingewiesen, durch den die in dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse Berücksichtigung finden können.

(Eingegangen am 13. September 1955)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *G. Hoeland*, Dortmund, Liebigstr. 4

Vor kurzem erschienen:

Acht- und neunstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen. Dargestellt mittels des Jacobischen Parameters q.

Eight und Nine Place Tables of Elliptical Functions. Based on Jacobi's Parameter q.

Von Dr.-Ing. **M. Schuler,** Professor emeritus an der Universität Göttingen, und Dr. phil. habil. **H. Gebelein,** Dozent, Bamberg. Mit einem englischen Text von Lauritz S. Larsen, B. S. Mit 11 Abbildungen. XXIV, 296 Seiten 4°. 1955. Ganzleinen DM 58,—

Inhaltsverzeichnis (deutsch und englisch): Vorwort. Inhaltsverzeichnis. Einführung. Tabelle I: Funktionen $G(q^4, z)$ laufend nach z (mit Angabe der zugehörigen Werte q und Θ). Tabelle II: Funktionen $G(q^4, z)$ laufend nach q^4. Zugehörige Werte q und Θ zusammengestellt. Tabelle III: Funktionen $H(q^3, z)$ laufend nach z (mit Angabe der zugehörigen Werte q und Θ). Tabelle IV: Funktionen $H(q^3, z)$ laufend nach q^3. Zugehörige Werte q und Θ zusammengestellt. Tabelle V: *Jacobi*sche elliptische Funktionen laufend nach z (mit Angabe der zugehörigen Werte für Θ, $-\lg\cos\Theta = -\lg k'$, K und K/E). Tabelle VI: *Jacobi*sche elliptische Funktionen laufend nach q. Zugehörige Werte für $-\lg k'$ und Θ. Zugehörige Werte für K und K/E. Tabelle VII: Tafeln für die Umrechnung zwischen dem *Legendre*schen Modul Θ und dem *Jacobi*schen Parameter q.

Fünfstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen. Darsgetellt mittels des Jacobischen Parameters q.

Five Place Tables of Elliptical Funktions.

Based on Jacobi's Parameter q.

Von Dr.-Ing. **M. Schuler,** Professor emeritus an der Universität Göttingen, und Dr. phil. habil. **H. Gebelein,** Dozent, Bamberg. Mit einem englischen Text von Lauritz S. Larsen, B. S. Mit 11 Abbildungen. XI, 114 Seiten Gr.-8°. 1955. Ganzleinen DM 29,60

Inhaltsverzeichnis (deutsch und englisch): Vorwort. Inhaltsverzeichnis. Einführung. Tabelle I: *Jacobi*sche elliptische Funktionen laufend nach z mit Angabe der zugehörigen Werte Θ. Tabelle II: *Jacobi*sche elliptische Funktionen laufend nach q. Beigefügt: Werte für Θ und $-\lg\cos\Theta$. Werte für K und K/E. Tabelle III: Funktionen $\overline{G}(q, z)$ und $\overline{H}(q, z)$ laufend nach z (mit Angabe der zugehörigen Werte Θ). Tabelle IV: Funktionen $\overline{G}(q, z)$ und $\overline{H}(q, z)$ laufend nach q. Tabelle V: Tafel für die Umrechnung zwischen dem *Legendre*schen Modul Θ und dem *Jacobi*schen Parameter q. Tabelle VI: Tafeln der Koeffizienten für die Interpolation nach *Everett*.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Berechnung und Gestaltung von Gummifedern

Von Dr.-Ing. **E. F. Göbel**, Karlsruhe. (Konstruktionsbücher. Hrsg. Prof. Dr.-Ing. K. Kollmann, Karlsruhe. 7. Band.)

Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 110 Abb. VI, 86 Seiten Gr.-8°. 1955. DM 9,—

Inhaltsübersicht: **Vorwort.** Benutzte Formelzeichen. — **Einführung:** Gewinnung und Verarbeitung von Gummi. Herstellung von Gummifedern. Verwendungsmöglichkeiten. — **Eigenschaften:** Elastische Verformungsfähigkeit. Dämpfung von mechanischen Schwingungen. Dämpfung von Körperschall-Schwingungen. Schubmodul und Elastizitätsmodul. Shore-Härte. Festigkeit. Einfluß von Wärme, Kälte und angreifenden Mitteln. — **Berechnung statisch beanspruchter Gummifedern:** Berechnungsgrundlagen. Schubbeanspruchte Gummifedern. Druckbeanspruchte Gummifedern. Kombinierte Schub- und Druckbeanspruchung. Sonderfälle. — **Berechnung dynamisch beanspruchter Gummifedern:** Grundlagen der Schwingungsisolierung. Dynamische Federkonstante und Eigenschwingungszahl. Berechnung einer gummigefederten Freischwinger-Siebmaschine. Berechnung eines Vibrationsrostes mit gummigefederter Zusatzmasse. — **Konstruktionsbeispiele:** Konstruktionsrichtlinien. Allgemeiner Maschinenbau. Werkzeugmaschinenbau. Straßenfahrzeuge. Schienenfahrzeuge. Gummikupplungen. Gerätebau. Fertigungstechnik. — **Prüfung von Gummi und Gummifedern.** — **Schrifttum.** — **Quellennachweis.** — **Sachverzeichnis.**

Seit dem Erscheinen der ersten Auflage hat die Verwendung von Gummi in der Form von Gummifedern beträchtlich zugenommen. Es wurden weitgehende theoretische Erkenntnisse gewonnen und viele praktische Erfahrungen gesammelt. Der Begriff Gummifeder hat sich analog dem Begriff Metallfeder allgemein eingeführt.

In der vorliegenden zweiten Auflage ist das bis heute Erreichte dargestellt worden mit besonderer Berücksichtigung der Belange des Konstrukteurs. Die Berechnungsgrundlagen wurden durch einige wichtige Fälle erweitert und auf schwingungstechnische Aufgaben ausgedehnt. Beispiele aus der Praxis, die zahlenmäßig vollständig durchgerechnet sind, zeigen die Anwendung der Gleichungen. Der Abschnitt Konstruktionsbeispiele konnte erheblich vergrößert werden. Neu hinzugekommen sind die Konstruktionsrichtlinien und Ausführungen über die Prüfung von Gummifedern bei statischer und dynamischer Beanspruchung. Die wichtigste, in den letzten 20 Jahren erschienene Literatur wurde in einem Verzeichnis zusammengestellt, ebenso die von der einschlägigen Industrie und von wissenschaftlichen Instituten in dankenswerter Weise zur Verfügung gestellten Bild- und Tabellenunterlagen.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Mit 2 Beilagen des Springer-Verlages · Berlin / Göttingen / Heidelberg.

Springer-Verlag · Berlin / Göttingen / Heidelberg. Printed in Germany. 57 275 4022 0,8 K. B./Z. 040.